

Analisis Model Epidemik Penyakit Campak Dengan Mempertimbangkan Vaksinasi

Nadia Amalia Ichسانی^{a,1,*}, Yudi Ari Adi^{b,2}

^a Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, Indonesia;

^b Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, Indonesia.

¹ nadia1800015099@webmail.uad.ac.id; ² yudi.adi@math.uad.ac.id.

*Correspondent Author

Received:

Revised:

Accepted:

KATAKUNCI

Campak
Model SEIRS
Titik Keseimbangan
Next Generation Matrix
Runge-Kutta

ABSTRAK

Kasus penyakit campak di Indonesia masih terus terjadi tiap tahunnya. Pemerintah Indonesia masih terus mengkampanyekan gerakan vaksinasi campak pada anak-anak usia dibawah 15 tahun. Pada penelitian ini bertujuan untuk mengetahui model epidemik penyebaran penyakit campak dan kestabilan dari sistem serta bagaimana pengaruh vaksinasi terhadap jumlah individu dari setiap kelas. Dari sistem model diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu bebas penyakit dan endemik kemudian mencari bilangan reproduksi dasar menggunakan metode *Next Generation Matrix* dan melakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta. Hasil analisis menyimpulkan titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ yang memberi makna penyakit campak dalam waktu yang akan datang akan semakin berkurang dan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik jika $R_0 > 1$ yang memberi makna penyakit campak akan tetap ada pada populasi dalam jangka waktu tertentu. Laju proporsi orang yang tervaksinasi yang diperbesar dapat berpengaruh dalam menurunkan tingkat penyebaran penyakit campak.

KEYWORDS

Measles
SEIRS Model
Equilibrium Point
Next Generation Matrix
Runge-Kutta

ABSTRACT

Measles cases in Indonesia still occur every year. The Indonesian government is still campaigning for the measles vaccination movement for children under 15 years of age. This study aims to determine the epidemic model of the spread of measles and the stability of the system and how the effect of vaccination on the number of individuals from each class. From the model system, two points of achievement are obtained, namely disease-free and endemic, then find the basic reproduction number using the *Next Generation Matrix* method and perform numerical simulations using the Runge-Kutta method. The results of the analysis of the free equilibrium point are asymptotically stable if $R_0 < 1$ which means that measles will continue to decrease in the future and the endemic equilibrium point will be asymptotically stable if $R_0 > 1$ which means that measles will remain in the population for a certain period of time. The rate at which the proportion of people vaccinated is increased can have an effect in reducing the spread of measles.

This is an open-access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.



Pendahuluan

Indonesia yang termasuk ke dalam negara berkembang masih memiliki masalah kesehatan lingkungan yang sering terjadi diantaranya, pembuangan sampah, pembuangan air limbah (air kotor), perumahan (housing), sanitasi (jamban), dan penyediaan air minum [1]. Dari permasalahan ini akan mengakibatkan munculnya penyakit-penyakit pada masyarakat. Selain disebut sebagai negara berkembang, negara tropis dan wilayah endemik adalah nama lain untuk menyebut negara Indonesia yang mana penyakit menular seperti TBC, DBD, cacar air, diare, pneumonia, campak dan masih banyak lagi sering dijumpai [1]. Penyakit menular merupakan penyakit yang ketika manusia yang terinfeksi nantinya bisa menularkan penyakit itu kepada manusia yang sehat tetapi termasuk rentan sehingga jika tertular akan menjadi terinfeksi penyakit itu juga [2].

Virus rubeola dan rubella merupakan nama virus dari penyakit campak yang dapat menularkan dari individu yang satu ke individu yang lain. Virus rubeola adalah virus yang menyebabkan campak merah, virus ini disebut juga campak keras. Pneumonia dan ensefalitis adalah kondisi yang dapat terjadi saat kita terjangkit penyakit campak meskipun ketika individu terjangkit dapat segera sembuh. Di sisi lain, campak Jerman juga disebabkan oleh virus rubella. Penyakit ini dapat ditularkan melalui batuk, bersin, dan sentuhan [3]. Tanda-tanda dari penyakit ini adalah munculnya ruam merah di sekujur tubuh. Gejala sakit tenggorokan, batuk, dan bersin terjadi pada orang yang terinfeksi sebelum adanya ruam pada kulit.

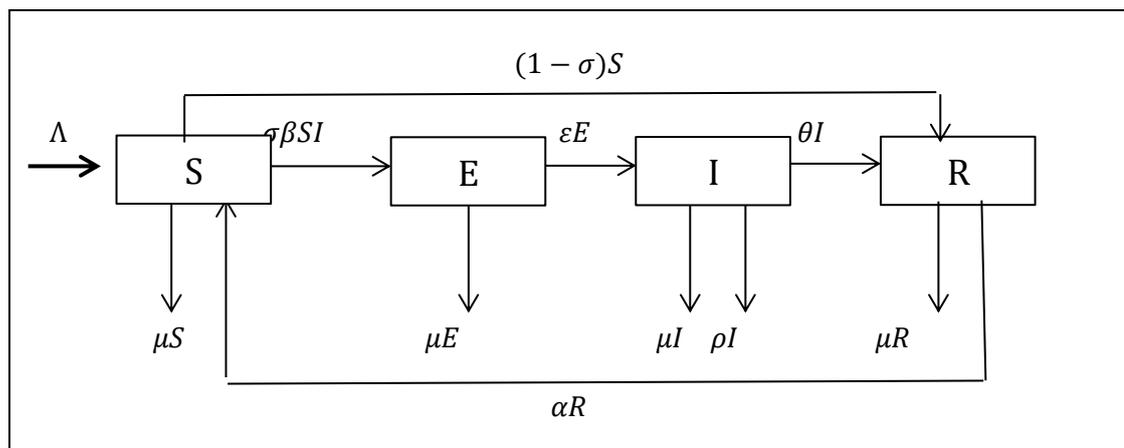
Suspek campak tersebar hampir di seluruh wilayah Indonesia pada tahun 2019, dengan *Incidence Rate (IR)* sebesar 3,29 per 100.000 penduduk. Dibandingkan dengan tahun 2018 yang sebesar 3,18 per 100.000 penduduk angka tersebut mengalami peningkatan kemudian sebanyak 3.382 terdapat kasus suspek campak tahun 2020. Di awal tahun 2020 kasus suspek campak cenderung tinggi kemudian bulan April terjadi penurunan kasus secara drastis sampai akhir tahun [4]. Selain pengobatan untuk menyembuhkan individu yang telah terinfeksi campak, diciptakannya vaksin sangat penting untuk menekan laju bertambahnya individu yang terinfeksi penyakit ini [5]. Di Indonesia sendiri pemerintah telah menjalankan program imunisasi untuk penyakit campak. Program imunisasi ini diberikan untuk anak balita dan anak yang menginjak usia <15 tahun, dengan adanya program imunisasi ini tentunya sangat berpengaruh untuk mengurangi pertambahan dari individu yang terinfeksi campak di Indonesia [6].

Pemodelan pada matematika adalah salah satu cara untuk mempresentasikan permasalahan-permasalahan di dunia nyata ke dalam model matematika [7]. Model matematika nantinya dapat menjelaskan situasi dari masalah yang sedang diamati [8]. Dalam

penelitian ini akan dibahas mengenai analisis penyakit campak dengan membentuk model epidemik SEIRS dengan mencari tingkat kestabilan dari titik ekuilibrium dengan seseorang yang telah diberikan vaksin campak memiliki peluang untuk tertular penyakit ini lagi selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk model tersebut. Kelas-kelas pada model SEIRS diantaranya, kelas individu rentan (S), kelas individu yang terpapar (E), kelas individu terinfeksi (I), dan kelas individu yang sembuh (R).

Metode

Pembentukan model matematika diperoleh dengan menentukan asumsi-asumsi terlebih dahulu. Asumsi-asumsi yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: (1) Rekrutmen individu dalam penelitian ini pada kelompok usia <15 tahun. (2) Terjadi kematian alami dan kematian akibat penyakit. (3) Tidak semua individu tervaksinasi. (4) Populasi yang sembuh bisa menjadi rentan kembali akibat dari menurunnya kekebalan imun. Menggunakan asumsi-asumsi di atas, maka dapat dibentuk diagram kompartemen untuk penyebaran penyakit campak yang dapat dilihat dalam gambar (1),



Gambar 1. Diagram kompartemen model SEIRS penyakit campak.

Keterangan untuk variabel dan parameter dari model dirangkum dalam tabel berikut:

Tabel 1. Variabel dan parameter yang digunakan

<i>Variabel & Parameter</i>	<i>Keterangan</i>
$S(t)$	Banyaknya individu rentan terinfeksi penyakit pada waktu t
$E(t)$	Banyaknya populasi individu terpapar penyakit pada waktu t
$I(t)$	Banyaknya individu terinfeksi penyakit pada waktu t
$R(t)$	Banyaknya individu yang sembuh dari infeksi penyakit pada waktu t
Λ	Laju <i>recruitment</i> populasi
$1 - \sigma$	Proporsi individu yang tervaksinasi

σ	Proporsi individu yang tidak tervaksin
β	Laju penularan
ε	Laju perpindahan dari terpapar ke infeksi
θ	Laju pengobatan
μ	Laju kematian alami
ρ	Laju kematian akibat campak
α	Laju perpindahan individu menjadi rentan lagi

Hasil dan Pembahasan

1. Formula Matematis

Dari asumsi dan hubungan antara variabel dan parameter yang ditunjukkan dalam diagram kompartemen pada Gambar (3), persamaan model matematika penyakit campak diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - (1 - \sigma)S - \sigma\beta SI + \alpha R - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= \sigma\beta SI - \mu E - \varepsilon E \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (\theta + \mu + \rho)I \\ \frac{dR}{dt} &= (1 - \sigma)S + \theta I - \mu R - \alpha R\end{aligned}\tag{1}$$

dengan

$$N = S + E + I + R.$$

2. Analisis Model

a. Titik Ekuilibrium

Jika turunan suatu fungsi di suatu titik adalah nol, maka nilai fungsi tidak berubah pada saat itu. Dalam konteks persamaan diferensial, titik-titik tersebut disebut titik ekuilibrium. Jadi, titik ekuilibrium adalah titik tetap yang tidak bergantung pada waktu. Dalam persamaan model epidemik campak dengan menuliskan sistem model (1) menjadi bentuk persamaan sama dengan nol diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu:

1) Titik ekuilibrium bebas penyakit

$$E_0 = (S_p, E_p, I_p, R_p)\tag{2}$$

dengan

$$S_p = \frac{\Lambda(\mu + \alpha)}{\mu(1 - \sigma + \mu + \alpha)},$$

$$E_p = 0,$$

$$I_p = 0,$$

$$R_p = \frac{\Lambda(1 - \sigma)}{\mu(1 - \sigma + \mu + \alpha)}$$

2) Titik ekuilibrium endemik

$$E_1^* = (S^*, E^*, I^*, R^*) \quad (3)$$

dengan

$$S^* = \frac{(\theta + \mu + \rho)(\mu + \varepsilon)}{\varepsilon\sigma\beta},$$

$$E^* = \frac{\sigma\beta S^* I^*}{\mu + \varepsilon},$$

$$I^* = \frac{\Lambda - ((1 - \sigma) + \mu)S^* + \alpha R^*}{\sigma\beta S^*},$$

$$R^* = \frac{(1 - \sigma)S^* + \theta I^*}{(\mu + \alpha)}.$$

b. Bilangan Reproduksi

Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah bilangan yang menyatakan rata-rata banyaknya individu yang terinfeksi akibat tertular dari individu lain. Selain itu, memberitahukan keberadaan suatu penyakit dalam sebuah populasi, yaitu apakah akan terus bertambah, menetap atau hilang. *Next Generation Matrix (NGM)* merupakan metode yang digunakan untuk mencari bilangan reproduksi dasar. Dari sistem model (1) dapat dibentuk matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} , dengan \mathcal{F} adalah matriks yang menyatakan bertambahnya individu baru dan \mathcal{V} adalah matriks yang menyatakan individu yang terinfeksi adalah sebagai berikut:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \sigma\beta SI \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \mu E + \varepsilon E \\ -\varepsilon E + (\theta + \mu + \rho)I \end{bmatrix}, \quad (5)$$

substitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) maka matriks jacobian dari persamaan (4) dan (5) adalah

$$F(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & \sigma\beta S_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$V(E_0) = \begin{bmatrix} \mu + \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \theta + \mu + \rho \end{bmatrix}, \quad (7)$$

sehingga menggunakan rumus $[FV^{-1}]$ dan menentukan nilai eigen terbesarnya dapat diperoleh bilangan reproduksi dasar dari sistem model (1) yang dituliskan sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\varepsilon\sigma\beta S_p}{(\mu + \varepsilon)(\theta + \mu + \rho)}, \quad (8)$$

atau

$$R_0 = \frac{\varepsilon\sigma\beta\Lambda(\mu + \alpha)}{\mu(1 - \sigma + \mu + \alpha)(\mu + \varepsilon)(\theta + \mu + \rho)}, \quad (9)$$

dengan $S_p = \frac{\Lambda(\mu+\alpha)}{\mu(1-\sigma+\mu+\alpha)}$.

c. Analisis Kestabilan Lokal

Kestabilan dari titik ekuilibrium dapat diperoleh dengan mencari matriks jacobian menggunakan rumus yang ditulis sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\frac{dS}{dt})}{\partial S} & \frac{\partial(\frac{dS}{dt})}{\partial E} & \frac{\partial(\frac{dS}{dt})}{\partial I} & \frac{\partial(\frac{dS}{dt})}{\partial R} \\ \frac{\partial(\frac{dE}{dt})}{\partial S} & \frac{\partial(\frac{dE}{dt})}{\partial E} & \frac{\partial(\frac{dE}{dt})}{\partial I} & \frac{\partial(\frac{dE}{dt})}{\partial R} \\ \frac{\partial(\frac{dI}{dt})}{\partial S} & \frac{\partial(\frac{dI}{dt})}{\partial E} & \frac{\partial(\frac{dI}{dt})}{\partial I} & \frac{\partial(\frac{dI}{dt})}{\partial R} \\ \frac{\partial(\frac{dR}{dt})}{\partial S} & \frac{\partial(\frac{dR}{dt})}{\partial E} & \frac{\partial(\frac{dR}{dt})}{\partial I} & \frac{\partial(\frac{dR}{dt})}{\partial R} \end{bmatrix} \quad (10)$$

sehingga matriks jacobian dari persamaan (1) adalah

$$J = \begin{bmatrix} -(1-\sigma) - \sigma\beta I - \mu & 0 & -\sigma\beta S & \alpha \\ \sigma\beta I & -(\mu + \varepsilon) & \sigma\beta S & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\theta + \mu + \rho) & 0 \\ 1 - \sigma & 0 & \theta & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Teorema 1. (Kestabilan Lokal pada E_0)

Diketahui $R_0 = \frac{\varepsilon\sigma\beta S_p}{(\mu+\varepsilon)(\theta+\mu+\rho)}$ dengan $S_p = \frac{\Lambda(\mu+\alpha)}{\mu(1-\sigma+\mu+\alpha)}$ jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) stabil asimtotik dan jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) tidak stabil.

Bukti. Dari persamaan (2), dibentuk matriks jacobian untuk titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) diperoleh sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -(1-\sigma+\mu) & 0 & -\sigma\beta S_p & \alpha \\ 0 & -(\mu + \varepsilon) & \sigma\beta S_p & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\theta + \mu + \rho) & 0 \\ 1 - \sigma & 0 & \theta & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

dari persamaan (12) akan dicari nilai eigen dari persamaan karakteristik yang diperoleh menggunakan $\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$, sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya

$$\Leftrightarrow (\mu + \lambda)(\alpha + \mu - \sigma + 1 + \lambda)(-\lambda^2 + (2\mu - \rho - \theta - \varepsilon)\lambda - \mu^2 + (-\rho - \theta - \varepsilon)\mu + \varepsilon(\sigma\beta S_p - \rho - \theta)) = 0, \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)(\lambda + \alpha + \mu - \sigma + 1)(\lambda^2 - (2\mu - \rho - \theta - \varepsilon)\lambda + \mu^2 - (-\rho - \theta - \varepsilon)\mu - \varepsilon(\sigma\beta S_p - \rho - \theta)) = 0, \quad (14)$$

sehingga dapat diperoleh

$$\lambda_1 = -\mu \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = -\alpha - \mu + (\sigma - 1),$$

jelas $\lambda_1 < 0$ dan $0 < \sigma < 1$ sehingga $\lambda_2 < 0$ selanjutnya untuk akar-akar lainnya dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + (\rho + \theta + \varepsilon - 2\mu)\lambda + \mu^2 - (-\rho - \theta - \varepsilon)\mu - \varepsilon(\sigma\beta S_p - \rho - \theta) &= 0, \\ \lambda^2 + (\rho + \theta + \varepsilon - 2\mu)\lambda + (\theta + \mu + \rho)(\mu + \varepsilon)[1 - R_0] &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

dari persamaan (15) diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{-(\rho + \theta + \varepsilon - 2\mu) - \sqrt{(\rho + \theta + \varepsilon - 2\mu)^2 - 4(\theta + \mu + \rho)(\mu + \varepsilon)[1 - R_0]}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \left((\rho + \theta + \varepsilon - 2\mu) + \sqrt{(\rho + \theta + \varepsilon - 2\mu)^2 - 4(\theta + \mu + \rho)(\mu + \varepsilon)[1 - R_0]} \right), \\ \lambda_4 &= \frac{-(\rho + \theta + \varepsilon - 2\mu) + \sqrt{(\rho + \theta + \varepsilon - 2\mu)^2 - 4(\theta + \mu + \rho)(\mu + \varepsilon)[1 - R_0]}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \left((\rho + \theta + \varepsilon - 2\mu) - \sqrt{(\rho + \theta + \varepsilon - 2\mu)^2 - 4(\theta + \mu + \rho)(\mu + \varepsilon)[1 - R_0]} \right), \end{aligned}$$

λ_3 selalu bernilai negatif dan $\lambda_4 < 0$ sehingga berakibat $\sqrt{(\rho + \theta + \varepsilon - 2\mu)^2 - 4(\theta + \mu + \rho)(\mu + \varepsilon)[1 - R_0]} < (\rho + \theta + \varepsilon - 2\mu)$ jika $R_0 < 1$. Dengan demikian, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$ sehingga terbukti bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.

Teorema 2. (Kestabilan Lokal E_1)

Diketahui $R_0 = \frac{\varepsilon\sigma\beta S_p}{(\mu + \varepsilon)(\theta + \mu + \rho)}$ dengan $S_p = \frac{\Lambda(\mu + \alpha)}{\mu(1 - \sigma + \mu + \alpha)}$ jika

$$R_0 > 1, \quad (a)$$

$$\frac{\Lambda - \alpha R^*}{((1 - \sigma) + \mu)S^*} > 1, \quad (b)$$

$$\frac{\Lambda - ((1 - \sigma) + \mu)S^* + \alpha R^*}{S^{*2} \varepsilon \sigma \beta (1 - \sigma)} > 1, \quad (c)$$

$$\theta \left(\frac{(1 - \sigma)S^* + \Lambda - ((1 - \sigma) + \mu)S^* + \alpha R^* + S^* \mu}{(1 - \sigma)\varepsilon\sigma\beta S^{*2}} \right) > 1 \quad (d)$$

$$\frac{(\mu + \alpha)((1 - \sigma)S^* + \Lambda - ((1 - \sigma) + \mu)S^* + \alpha R^* + \mu S^*)}{\alpha(1 - \sigma)S^*} > 1, \quad (e)$$

dengan syarat (a)-(e) terpenuhi maka titik ekuilibrium tak bebas penyakit (E_1) stabil asimtotik.

Bukti. Dari bilangan R_0 dapat diperoleh

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\varepsilon\sigma\beta S_p}{(\mu + \varepsilon)(\theta + \mu + \rho)}, \\ &= \frac{S_p}{S^*}, \end{aligned}$$

sehingga titik ekuilibrium endemik (E_1) menjadi

$$\begin{aligned} (\theta + \mu + \rho)(\mu + \varepsilon) &= \frac{\varepsilon\sigma\beta S_p}{R_0}, \\ E^* &= \frac{\varepsilon\sigma\beta S_p I^*}{R_0(\mu + \varepsilon)}, \end{aligned}$$

$$I^* = \frac{\Lambda R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0}{\sigma \beta S_p},$$

$$R^* = \frac{(1 - \sigma)S_p}{R_0(\mu + \alpha)} + \frac{\theta I^*}{(\mu + \alpha)}.$$

Selanjutnya dapat diperoleh matriks jacobian untuk titik ekuilibrium E_1 , yaitu:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\left((1 - \sigma) + \frac{\Lambda R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0}{S_p} + \mu\right) & 0 & -\frac{\varepsilon \sigma \beta S_p}{R_0} & \alpha \\ \frac{\Lambda R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0}{S_p} & -(\mu + \varepsilon) & \frac{\varepsilon \sigma \beta S_p}{R_0} & 0 \\ 0 & 0 & -(\theta + \mu + \rho) & 0 \\ 1 - \sigma & 0 & \theta & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

agar memudahkan dalam menentukan nilai eigennya, digunakan metode Operasi Baris Elementer (OBE) pada persamaan (16) untuk membentuk matriks segitiga atas. Matriks hasil OBE diperoleh sebagai berikut:

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & -\frac{\varepsilon \sigma \beta S_p}{R_0} & \alpha \\ 0 & -(\mu + \varepsilon) & G & H \\ 0 & 0 & K & L \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}, \quad (17)$$

dengan

$$\begin{aligned} A &= -\left((1 - \sigma) + \frac{\Lambda R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0}{S_p} + \mu\right), \\ G &= -\frac{(\Lambda R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0)\theta}{S_p(1 - \sigma)} + \frac{\varepsilon \sigma \beta S_p}{R_0}, \\ H &= -\frac{\Lambda R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0}{S_p} \left(-\frac{(\mu + \alpha)}{(1 - \sigma)}\right), \\ K &= \frac{\varepsilon}{\mu + \varepsilon} \left(-\frac{(\Lambda R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0)\theta}{S_p(1 - \sigma)} + \frac{\varepsilon \sigma \beta S_p}{R_0}\right) - (\theta + \mu + \rho), \\ L &= \frac{\varepsilon}{\mu + \varepsilon} \left(-\frac{\Lambda R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0}{S_p} \left(\frac{-(\mu + \alpha)}{(1 - \sigma)}\right)\right), \\ R &= \frac{-P}{K} L + Q, \end{aligned}$$

dari persamaan (17) akan dicari nilai eigen dari persamaan karakteristik yang diperoleh menggunakan $\det(J(E_1) - \lambda I) = 0$, sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya

$$(A - \lambda)(-\mu + \varepsilon - \lambda)(K - \lambda)(R - \lambda) = 0, \quad (18)$$

sehingga

untuk $\lambda_1 = A$,

$$= -\left((1 - \sigma) + \frac{\Lambda R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0}{S_p} + \mu\right),$$

dengan $0 < \sigma < 1$ sehingga $\lambda_1 < 0$ jika $R_0 > 1$ dan

$$\begin{aligned} \Delta R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0 &> 0, \\ \Leftrightarrow \Delta R_0 &> ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0, \\ \Leftrightarrow R_0(\Delta - \alpha R^*) &> ((1 - \sigma) + \mu)S_p, \\ \Leftrightarrow \frac{S_p}{S^*}(\Delta - \alpha R^*) &> ((1 - \sigma) + \mu)S_p, \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta - \alpha R^*}{((1 - \sigma) + \mu)S^*} &> 1, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh syarat tambahan bahwa $\frac{\Delta - \alpha R^*}{((1 - \sigma) + \mu)S^*} > 1$.

Untuk $\lambda_2 = -(\mu + \varepsilon)$,

$\lambda_2 < 0$ karena semua nilai parameter positif.

Untuk $\lambda_3 = K$,

$$\begin{aligned} &= \frac{\varepsilon}{\mu + \varepsilon} \left(-\frac{(\Delta R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0)\theta}{S_p(1 - \sigma)} + \frac{\varepsilon\sigma\beta S_p}{R_0} \right) - (\theta + \mu + \rho), \\ &= -\left(\left(\frac{(\Delta R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0)\varepsilon\theta}{S_p(1 - \sigma)(\mu + \varepsilon)} - \frac{\varepsilon^2\sigma\beta S_p}{R_0(\mu + \varepsilon)} \right) + (\theta + \mu + \rho) \right), \\ &= -\left(\left(\frac{(\Delta R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0)\varepsilon\theta R_0(\mu + \varepsilon) - \varepsilon^2\sigma\beta S_p^2(1 - \sigma)(\mu + \varepsilon)}{S_p(1 - \sigma)(\mu + \varepsilon)^2 R_0} \right) + (\theta + \mu + \rho) \right), \end{aligned}$$

dengan $0 < \sigma < 1$ jika $R_0 > 1$ dan

$$\begin{aligned} (\Delta R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0)\varepsilon\theta R_0(\mu + \varepsilon) &> \varepsilon^2\sigma\beta S_p^2(1 - \sigma)(\mu + \varepsilon), \\ \Leftrightarrow R_0^2\Delta\varepsilon\theta(\mu + \varepsilon) - ((1 - \sigma) + \mu)S_p\varepsilon\theta R_0(\mu + \varepsilon) + R_0^2\alpha R^*\varepsilon\theta(\mu + \varepsilon) &> \varepsilon^2\sigma\beta S_p^2(1 - \sigma)(\mu + \varepsilon), \\ \Leftrightarrow S_p^2\varepsilon\theta(\mu + \varepsilon) \left(\frac{\Delta - ((1 - \sigma) + \mu)S^* + \alpha R^*}{S^2} \right) &> \varepsilon^2\sigma\beta S_p^2(1 - \sigma)(\mu + \varepsilon), \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta - ((1 - \sigma) + \mu)S^* + \alpha R^*}{S^2\varepsilon\sigma\beta(1 - \sigma)} &> 1, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh syarat tambahan apabila $R_0 > 1$ dan $\frac{\Delta - ((1 - \sigma) + \mu)S^* + \alpha R^*}{S^2\varepsilon\sigma\beta(1 - \sigma)} > 1$ maka $\lambda_3 < 0$.

Untuk $\lambda_4 = R$,

$$\begin{aligned} &= \frac{-P}{K}L + Q, \\ &= \left(\left(\frac{(1 - \sigma)\varepsilon\sigma\beta S_p^2}{R_0((1 - \sigma)S_p + \Delta R_0 - ((1 - \sigma) + \mu)S_p + \alpha R^* R_0 + \mu S_p)} \right) - \theta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left(\frac{R_0 S_p (1-\sigma)(\mu+\varepsilon)}{(\Lambda R_0 - ((1-\sigma)+\mu)S_p + \alpha R^* R_0) R_0 \varepsilon \theta + \varepsilon^2 \sigma \beta S_p^2 (1-\sigma) - (\theta + \mu + \rho) R_0 S_p (1-\sigma)(\mu+\varepsilon)} \right) \\ & \cdot \left(\frac{\varepsilon(\mu+\alpha)}{(\mu+\varepsilon)(1-\sigma)} \left(\frac{\Lambda R_0 - ((1-\sigma)+\mu)S_p + \alpha R^* R_0}{S_p} \right) \right) + \left(\frac{\alpha(1-\sigma)S_p}{(1-\sigma)S_p + \Lambda R_0 - ((1-\sigma)+\mu)S_p + \alpha R^* R_0 + \mu S_p} \right) - (\mu + \alpha), \\ & = \left(\frac{(1-\sigma)\varepsilon\sigma\beta S_p^2 - \theta \left(R_0 \left((1-\sigma)S_p + \Lambda R_0 - ((1-\sigma)+\mu)S_p + \alpha R^* R_0 + \mu S_p \right) \right)}{R_0 \left((1-\sigma)S_p + \Lambda R_0 - ((1-\sigma)+\mu)S_p + \alpha R^* R_0 + \mu S_p \right)} \right) \\ & \cdot \left(\frac{R_0 S_p (1-\sigma)(\mu+\varepsilon)}{R_0 \varepsilon \theta (\Lambda R_0 - ((1-\sigma)+\mu)S_p + \alpha R^* R_0) + \varepsilon^2 \sigma \beta S_p^2 (1-\sigma) - (\theta + \mu + \rho)(1-\sigma)(\mu+\varepsilon) R_0 S_p} \right) \\ & \cdot \left(\frac{\varepsilon(\mu+\alpha)}{(\mu+\varepsilon)(1-\sigma)} \left(\frac{\Lambda R_0 - ((1-\sigma)+\mu)S_p + \alpha R^* R_0}{S_p} \right) \right) + \\ & \left(\frac{\alpha(1-\sigma)S_p - (\mu+\alpha) \left((1-\sigma)S_p + \Lambda R_0 - ((1-\sigma)+\mu)S_p + \alpha R^* R_0 + \mu S_p \right)}{(1-\sigma)S_p + \Lambda R_0 - ((1-\sigma)+\mu)S_p + \alpha R^* R_0 + \mu S_p} \right), \end{aligned}$$

$\lambda_4 < 0$ jika $R_0 > 1$ dan $\theta \left(R_0 \left((1-\sigma)S_p + \Lambda R_0 - ((1-\sigma)+\mu)S_p + \alpha R^* R_0 + \mu S_p \right) \right) > (1-\sigma)\varepsilon\sigma\beta S_p^2$,

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \theta \left(\frac{(1-\sigma)S_p^2 S^* + \Lambda S_p^2 - ((1-\sigma)+\mu)S_p^2 S^* + \alpha R^* S_p^2 + S^* \mu S_p^2}{S^{*2}} \right) \\ & > (1-\sigma)\varepsilon\sigma\beta S_p^2, \\ & \Leftrightarrow \theta \left(\frac{(1-\sigma)S^* + \Lambda - ((1-\sigma)+\mu)S^* + \alpha R^* + S^* \mu}{(1-\sigma)\varepsilon\sigma\beta S^{*2}} \right) > 1, \end{aligned}$$

kemudian

$$\begin{aligned} & (\mu + \alpha) \left((1-\sigma)S_p + \Lambda R_0 - ((1-\sigma)+\mu)S_p + \alpha R^* R_0 + \mu S_p \right) > \alpha(1-\sigma)S_p, \\ & \Leftrightarrow \frac{(\mu+\alpha)((1-\sigma)S^* + \Lambda - ((1-\sigma)+\mu)S^* + \alpha R^* + \mu S^*)}{\alpha(1-\sigma)S^*} > 1, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh syarat tambahan apabila $R_0 > 1$, $\theta \left(\frac{(1-\sigma)S^* + \Lambda - ((1-\sigma)+\mu)S^* + \alpha R^* + S^* \mu}{(1-\sigma)\varepsilon\sigma\beta S^{*2}} \right) > 1$,

dan $\frac{(\mu+\alpha)((1-\sigma)S^* + \Lambda - ((1-\sigma)+\mu)S^* + \alpha R^* + \mu S^*)}{\alpha(1-\sigma)S^*} > 1$ maka $\lambda_3 < 0$. Maka $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$ jika $R_0 > 1$

dan syarat-syarat tambahan terpenuhi sehingga terbukti bahwa titik ekuilibrium endemik (E_1) bersifat stabil asimtotik lokal.

3. Simulasi Numerik

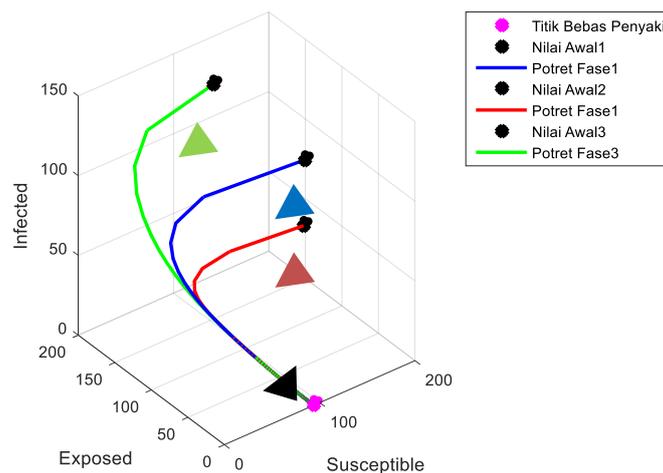
Selanjutnya akan dilakukan simulasi pada model penyakit campak agar dapat melihat bagaimana dinamika dari setiap kelas individu dalam interval waktu tertentu dan bagaimana pengaruh dari adanya vaksin untuk penyakit ini. Simulasi ini menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat dengan *software* Matlab.

a. Simulasi Model untuk $R_0 < 1$

Diasumsikan nilai awal untuk setiap variabel $S(0) = 200, E(0) = 100, I(0) = 130, R(0) = 175$ dan nilai parameter yang ditulis dalam tabel (2).

Tabel 2. Nilai asumsi parameter untuk $R_0 < 1$

<i>Parameter</i>	<i>Nilai</i>	<i>Sumber</i>
Λ	100	[3]
σ	0.15	Asumsi
β	[0.09091-0.2]	[6],[21]
ε	0.1	[3]
θ	0.3	Asumsi
μ	[0.00875-0.25]	[3], [6], [21]
ρ	0.03	[21]
α	0.01	Asumsi

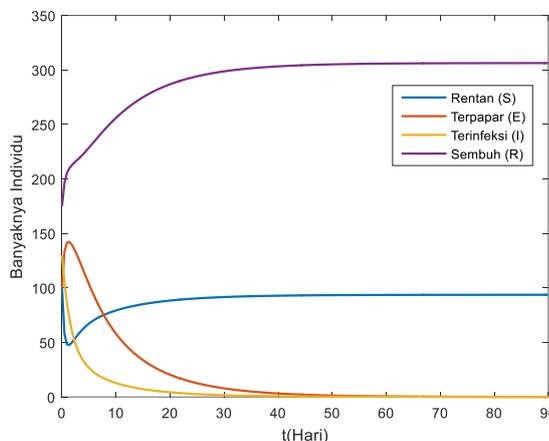


Gambar 2. Potret fase model untuk $R_0 < 1$

Pada gambar (2) ditunjukkan potret fase untuk melihat perilaku dari sistem model dengan nilai awal yang berbeda-beda dan dari nilai parameter yang digunakan diperoleh nilai $R_0 = 0.6294 < 1$, sehingga merepresentasikan bahwa kasus penyakit campak akan berkurang yang dapat dilihat juga dalam potret fase gambar (2) bahwa setiap kelas individu akan menuju dan stabil di titik ekuilibrium E_0 sehingga hanya ada satu titik ekuilibrium yang eksis yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit.

Pada gambar (3) diperoleh $E_0 = (93.69, 0, 0, 306.306)$ dari grafik dapat dilihat laju perubahan dari setiap kelas individu. Hanya ada kelas individu rentan dan sembuh yang masih terdapat individu sedangkan kelas individu terpapar dan terinfeksi menunjukkan perubahan yang tidak berbeda jauh sama-sama dengan berjalannya waktu jumlahnya semakin menurun

dan stabil dengan nol individu. Dengan demikian, perubahan setiap kelas individu ini membuktikan untuk keadaan bebas penyakit campak yaitu penyakit akan menghilang dari populasi sehingga sesuai dengan Teorema 1.



Gambar 3. Perubahan banyaknya individu dengan $R_0 < 1$

b. Simulasi Model untuk $R_0 > 1$

Menggunakan nilai awal yang sama untuk setiap kelas individu pada simulasi dengan $R_0 < 1$ kemudian diasumsikan nilai parameter yang ditulis dalam tabel (3).

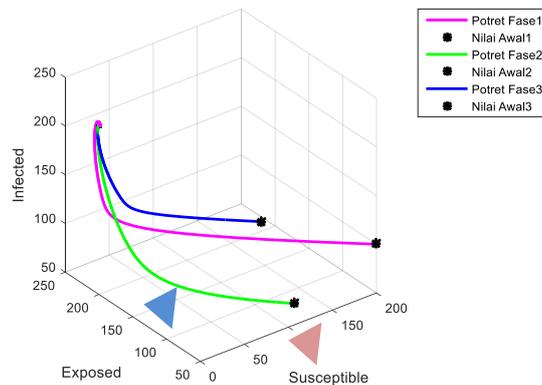
Tabel 3. Nilai asumsi parameter untuk $R_0 > 1$

<i>Parameter</i>	<i>Nilai</i>	<i>Sumber</i>
Λ	100	[3]
σ	0.35	Asumsi
β	[0.09091-0.8]	[6], [21]
ε	[0.125-0.7]	[6], [21]
θ	0.012	[6]
μ	[0.00875-0.25]	[3], [6], [21]
ρ	0.135	Asumsi
α	0.1	Asumsi

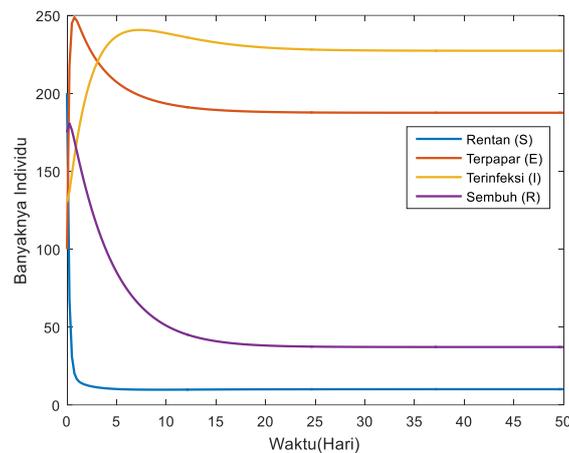
Pada gambar (4) ditunjukkan potret fase untuk melihat perilaku dari sistem model dengan nilai awal yang berbeda-beda dan dari nilai parameter yang digunakan diperoleh nilai $R_0 = 18.331 > 1$, sehingga merepresentasikan bahwa kasus penyakit campak akan tetap ada dalam populasi sehingga ada dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik tetapi hanya titik kesetimbangan E_1 yang eksis. Sesuai dengan yang ditunjukkan potret fase pada gambar (4) setiap kelas individu hanya akan menuju dan stabil di titik kesetimbangan E_1 .

Ditunjukkan juga pada gambar (5) diperoleh $E_1 = (10.19, 187.94, 227.86, 37.79)$ dapat dilihat laju perubahan dari setiap kelas individu. Kelas individu rentan dan sembuh mengalami

penurunan karena lebih besarnya proporsi individu yang belum melakukan vaksin dan diperkecilnya laju pengobatan sedangkan kelas individu terpapar dan terinfeksi menunjukkan peningkatan karena diperbesarnya laju penularan kemudian semua kelas individu stabil pada titik kesetimbangannya. Dengan demikian, perubahan setiap kelas individu ini membuktikan untuk keadaan endemik penyakit yaitu penyakit akan tetap ada pada populasi.



Gambar 4. Potret fase model untuk $R_0 > 1$



Gambar 5. Perubahan banyaknya individu dengan $R_0 > 1$

Selain syarat $R_0 > 1$ ada juga syarat lain, diantaranya,

$$\frac{\Lambda - \alpha R^*}{((1-\sigma) + \mu) S^*} = 11.7841 > 1,$$

$$\frac{\Lambda - ((1-\sigma) + \mu) S^* + \alpha R^*}{S^{*2} \epsilon \sigma \beta (1-\sigma)} = 87.6262 > 1,$$

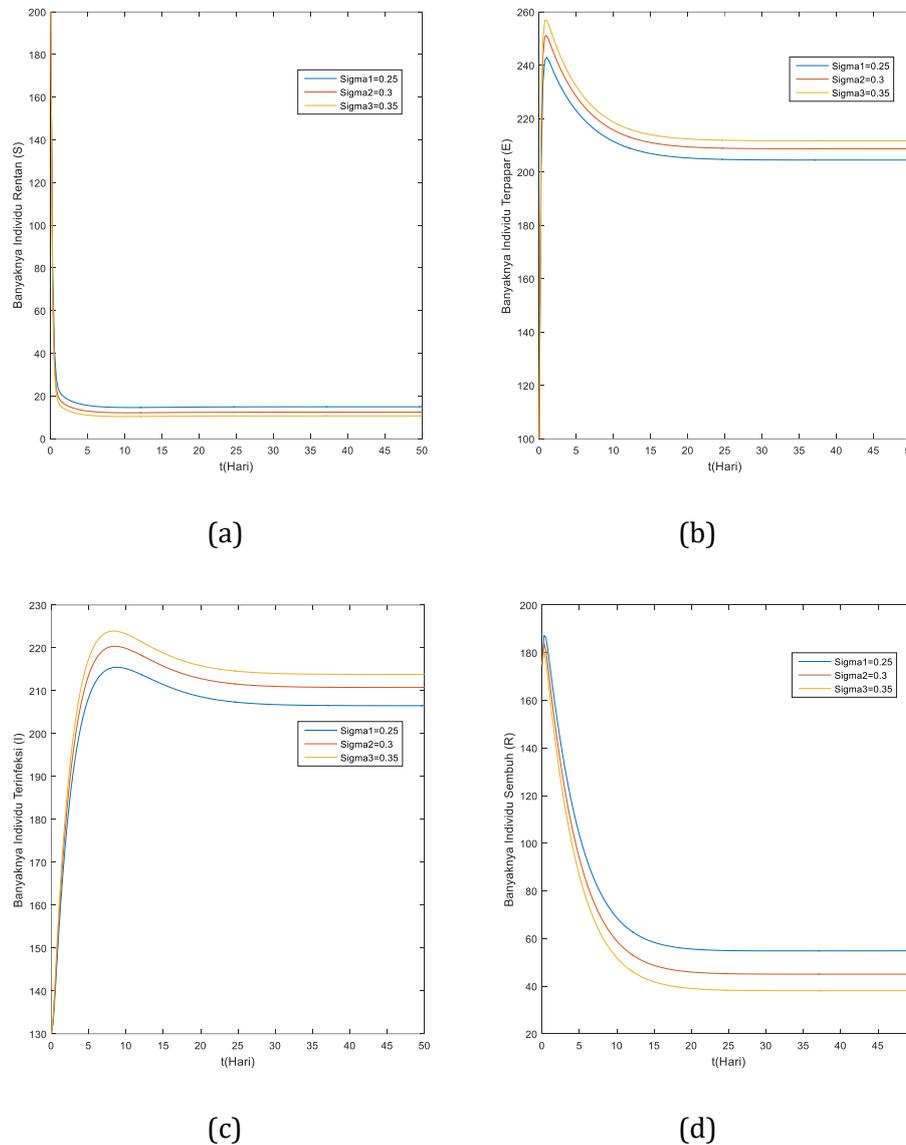
$$\theta \left(\frac{((1-\sigma) S^* + \Lambda - ((1-\sigma) + \mu) S^* + \alpha R^* + S^* \mu)}{(1-\sigma) \epsilon \sigma \beta S^{*2}} \right) = 1.2313 > 1$$

$$\frac{(\mu + \alpha) \left((1-\sigma) S^* + \Lambda - ((1-\sigma) + \mu) S^* + \alpha R^* + \mu S^* \right)}{\alpha (1-\sigma) S^*} = 39.8873 > 1,$$

sehingga syarat-syarat dalam Teorema 2 terpenuhi. Dengan demikian, perubahan setiap kelas individu ini membuktikan untuk keadaan endemik dan memenuhi Teorema 2.

c. Perbandingan Parameter Proporsi Orang Belum Tervaksin yang Bervariasi

Dari model penyebaran penyakit campak akan dimasukkan 3 parameter proporsi individu yang tidak melakukan vaksinasi dengan nilai yang berbeda-beda untuk melihat pengaruh vaksin terhadap setiap kelas individu.



Gambar 6. Perubahan banyaknya individu pada setiap kelas dengan σ bervariasi. (a) Banyaknya individu rentan (S), (b) banyaknya individu terpapar (E), (c) banyaknya individu terinfeksi (I), dan (d) banyaknya individu yang sembuh (R).

Pada gambar (6) terlihat perbandingan dari setiap kelas individu dalam kondisi $R_0 > 1$ ketika diberikan parameter dengan nilai yang berbeda untuk proporsi individu yang tidak melakukan vaksinasi. Pengaruh dari parameter ini terlihat dalam kelompok individu yang terpapar dan terinfeksi, semakin besar proporsi individu yang belum tervaksin semakin meningkat pula peluang individu terkena penyakit karena masih sedikitnya individu yang

melakukan vaksinasi. Individu yang sembuh juga lebih banyak jika banyaknya individu yang belum melakukan vaksinasi sedikit. Dengan demikian, proporsi banyaknya yang tervaksinasi dalam suatu populasi berpengaruh dalam meminimalisir kasus individu terkena penyakit campak.

Simpulan

Analisis model epidemik untuk penyakit campak pada penelitian ini diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) dan titik ekuilibrium endemik (E_1). Hasil analisis titik ekuilibrium menyimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan bahwa titik ekuilibrium endemik (E_1) stabil asimtotik jika $R_0 > 1$ dimana $R_0 = \frac{\varepsilon\sigma\beta\Lambda(\mu+\alpha)}{\mu(1-\sigma+\mu+\alpha)(\mu+\varepsilon)(\theta+\mu+\rho)}$ yang dapat direpresentasikan dari simulasi numerik yang dilakukan menggunakan matlab. Jika titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) stabil asimtotik maka kasus penyakit campak akan berkurang pada populasi yang mana kelas terpapar dan terinfeksi lama-lama akan menuju nol individu. Jika titik ekuilibrium endemik (E_1) stabil asimtotik maka kasus individu yang terkena campak akan tetap ada dalam populasi sehingga kelas individu yang terpapar dan terinfeksi akan mengalami peningkatan. Memperhatikan proporsi banyaknya yang tervaksinasi dalam suatu populasi juga dapat berpengaruh dalam meminimalisir kasus individu terkena penyakit campak.

Daftar Pustaka

- [1] L. Listautin and N. Nurzia, "Strategi Komunikasi dan Pelayanan Kader Kesehatan terhadap Pencegahan Penyakit Menular pada Komunitas Suku Anak dalam di Kabupaten Batanghari Provinsi Jambi," *J. Ilm. Univ. Batanghari Jambi*, vol. 20, no. 1, p. 21, 2020, doi: 10.33087/jiubj.v20i1.795.
- [2] F. Novianti, Y. R. A. Yasmin, and Rini Dian Candra, "Penerapan Algoritma Fuzzy C-Means (FCM) dalam Pengelompokan Provinsi di Indonesia berdasarkan Indikator Penyakit Menular Manusia," *JUMANJI (Jurnal Masy. Inform. Unjani)*, 2022, doi: 10.26874/jumanji.v6i1.103.
- [3] E. Satiti, P. Widyaningsih, and R. Setiyowati, "Model Susceptible Vaccinated Infected Treatment Recovered Dengan Pengaruh Sanitasi Pada Penyebaran Penyakit Menular (Kasus Campak Di Indonesia) 1)," *Januari*, vol. 10, no. 1, pp. 45–56, 2022.
- [4] KEMENKES, "Profil Kesehatan Indonesia 2020," 2020.
- [5] A. Azis and N. R. Ramadhani, "Hubungan Status Imunisasi, Umur Dan Jenis Kelamin Terhadap Penyakit Campak Di Kota Tangerang Selatan Tahun 2018," *J. Ilm. Kesehat.*, vol. 18, no. 2, pp. 37–41, 2019, doi: 10.33221/jikes.v18i2.228.
- [6] A. F. D. Hubu, N. Achmad, and N. Nurwan, "Model matematika SMEIUR pada penyebaran penyakit campak dengan faktor pengobatan," *Jambura J. Biomath.*, vol. 1, no. 2, pp. 71–80, 2020, doi: 10.34312/jjbm.v1i2.7970.
- [7] S. Side, W. Sanusi, and N. A. Bohari, "Pemodelan Matematika SEIR Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Pengaruh Vaksinasi di Kota Makassar," *J. Math. Comput. Stat.*, vol. 4, no. 1, p. 1, 2021, doi: 10.35580/jmathcos.v4i1.20444.
- [8] I. A. Putu Ari Utari, "Kontrol Optimal Upaya Pengobatan Penyakit Campak Menggunakan Model Endemi SIR," *J. Mat.*, vol. 9, no. 2, p. 94, 2019, doi: 10.24843/jmat.2019.v09.i02.p115.