Jurnal Ilmiah Matematika
Vol. 9, No. 1, April 2022, pp. 1-7
ISSN 2774-3241
http://journal.uad.ac.id/index.php/Konvergensi

Graf Order Elemen: representasi baru grup berhingga pada graf

Arif Munandar [a,1,*]

*a UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, Indonesia
1 arif.munandar@uin-suka.ac.id

Received: 03 maret 2022 *Revised: 31 maret 2022* *Accepted: 15 April 2022*

KATAKUNCI

Graf Order Elemen
Graf Hamilton
Graf Euler

ABSTRAK

Graf Order Elemen merupakan representasi grup berhingga pada graf dengan memandang anggota dari grup sebagai vertek dari graf dan vertek g *adjecent* dengan h jika hanya jika order g membagi order h atau sebaliknya. Melalui penelitian ini disampaikan bahwa graf order elemen dari grup siklik dengan order prima dan grup siklik dengan order p^k, p bilangan prima dan k bilangan bulat mempunyai hubungan dengan graf komplit, graf Hamilton dan graf Euler. Selain itu dibahas juga komplemen dari graf order elemen untuk grup siklik dengan order tertentu.

Element Order Graph: a new representation of groups on graph

KEYWORDS

Element Order Graph
Eulerian graph
Hamiltonian graph

Element Order Graph is representation of finite group on graph whose vertex is the element of group and vertex g adjecent with h if and only if the order of g divide the order of h or instead. Through this research, it was conveyed that the element order graph of the cyclic group with prime order and cyclic grooup with order p^k, of prime numbers p and integers k has a relationship with the complete graph, graph Hamilton and graph Euler. In addition, it also discusses the complement of the element order graph for cyclic groups with certain orders.

Pendahuluan

Hubungan antara teori grup berhingga dengan graf pertama kali diperkenalkan oleh Artur Cayley (1878). Cayley merepresentasikan grup berhingga G dan generator $A \subset G$ pada graf dengan memandang elemen-elemen dari grup sebagai vertek dan vertek $gh \in G$ insiden jika hanya jika $g = ah$ untuk suatu $a \in A$. Graf yang dihasilkan dari representasi tersebut kemudian dikenal dengan graf Cayley. Penelitian lanjutan mengenai graf Cayley banyak dikembangkan dengan memperumum grup berhingganya menjadi semigrup, seperti penelitian yang dilakukan Luo dkk [1]. Penelitian dari Zhu [2] juga mengeneraslisasi graf Cayley pada semigrup dan melihat sifat-sifat yang dihasilkannya, sementara Hosseinzadeh dan

A. Assari [3] mendefinisikan berbagai operasi yang dapat dilakukan dalam Cayley graf pada semigrup.

Penelitain lain mengenai representasi grup pada graf yang banyak dikenal adalah Power Graf yang dikenalkan oleh Kalarev dan Quinn [4] dalam konteks semigrup. Kalarev dan Quinn mendefinisikan Power Graf dengan melihat elemen pada semigrup G sebagai vertek dan vertek g dan h saling insiden jika terdapat bilangan asli n sedemikian sehingga $g = h^n$. Power graf yang dikenalkan Kalarev dan Quinn tersebut merupakan graf berarah, penelitian lanjutannya mengenai Power Graf tak berarah dilakukan oleh[5]. Penelitian lanjutan mengenai power graf dalam konteks grup berhingga dilakukan oleh Cameron dkk [6] dan Alireza dkk [7]. Pada tahun yang berbeda [8] kemudian melanjutkan penelitaian tentang power graf dengan fokus pada grup bebas torsi, sedangkan penelitian terbaru mengenai Power Graf dilakukan oleh [9] yang melakukan penelitian tentang Power Graf pada grup khusus yaitu dihedral dan quarternion.

Penelitian yang dituliskan [10] mendefinisikan Order Graf, yaitu graf yang terbentuk dari representasi grup berhingga G dengan memandang derajat dari grup G sebagai vertek dan vertek g insiden dengan h jika order g membagi order h atau sebaliknya. Sementara [11] melakukan penelitian pada Co-Prime Order Graph yaitu graf yang merupakan representasi grup G dengan mendefinisikan elemen dalam grup sebagai vertek, dan elemen g, h dalam G saling adjecent jika $o(g)$ dan $o(h)$ saling prima. Sementara [12] mendefinisikan Order Graph yaitu graf yang merupakan representasi grup G dengan mendefinisikan elemen dalam grup sebagai vertek, dan elemen g, h dalam G saling adjecent jika $o(g) \neq o(h)$ dan $o(h)|o(g)$ atau sebaliknya. Termotivasi dari penelitian-penelitian tersebut, penulis mendefinisikan graf order elemen (GOE) dengan mengganti vertek dalam definisi Order Graf yang semula order dari elemen dalam grup menjadi elemen dalam grup, selayaknya definisi Power Graf, graf Cayley, Co-Prime Order Graph atau Order Graph. Penelitian ini akan membahas mengenai jenis graf order elemen yang terbentuk dari grup berhingga yang telah banyak dikenal, seperti grup siklik dan grup dihedral dengan order tertentu serta mengkarakterisasi graf order elemen yang terbentuk dari grup tersebut.

Metode

Terminologi tentang grup diambil dari [13], sementara graph diambil dari [14] dan [15]. Berikut ini beberapa definisi terkait graph.

Definisi 2.1. Graf Γ adalah terdiri dari himpunan tak kosong vertek $V(\Gamma)$ dan himpunan rusuk $E(\Gamma)$ sedemikian sehingga setiap rusuk menghubungkan dua vertek berbeda dalam $V(\Gamma)$.

Definisi 2.2. Jika Γ adalah graf dengan himpunan vertek $V(\Gamma)$ dan rusuk $E(\Gamma)$, maka

1. Vertek $u, v \in V(\Gamma)$ dikatakan adjecent jika terdapat rusuk yang mengubungkannya, sementara rusuk $e \in E(\Gamma)$ dikatakan insiden dengan u atau v dalam $V(\Gamma)$ jika u dan v dihubungkan oleh rusuk e dengan kata lain $e = uv$.
2. Derajat dari vertek $v \in \Gamma$ didefinisikan sebagai banyaknya rusuk yang insiden dengan vertek v.
3. Subgraf θ dari Γ adalah graf dengan $V(\theta) = V(\Gamma)$ dan $E(\theta) \subset E(\Gamma)$.
4. Komplemen dari Graf Γ (dinotasikan Γ^C) adalah graf dengan $V(\Gamma) = V(\Gamma^C)$ dan $E(\Gamma^C) = \{uv | uv \notin E(\Gamma)\}$.
5. Walk W dalam graf Γ adalah barisan vertek dan rusuk dalam graf Γ. Walk tertutup yang tidak mengulang rusuk disebut dengan Circuit.
6. Path P dalam graf Γ adalah walk dengan tidak memuat vertek yang sama. Path P dalam graf Γ yang dimulai dan diakhiri dengan vertek yang sama disebut Cycle.
7. Graf Γ disebut terhubung jika untuk sebarang $u, v \in V(\Gamma)$ terdapat path yang mengubungkan u dan v.
8. Graf Γ disebut pohon jika graf tersebut terhubung dan tidak memuat cycle. Vertek $v \in V(\Gamma)$ disebut akar jika mempunyai derajat lebih dari 1, dan disebut daun jika derajatnya 1.
9. Graf Γ disebut graf Euler jika memuat circuit Euler, yaitu circuit yang memuat semua rusuk dalam graf Γ.
10. Graf Γ disebut graf Hamilton jika memuat Cycle Hamilton, yaitu Cycle yang memuat semua vertek dalam graf Γ.

Teorema 2.3. [15] Graf Γ adalah graf Euler jika hanya jika derajat setiap vertek dari Γ genap.

Hasil dan Pembahasan

Misalkan G adalah grup berhingga, maka $1 \leq o(g) \leq |G|$ untuk setiap $g \in G$. Sebagai konsekuensi dari teorema Lagrange, setiap order dari elemen $g \in G$ selalu membagi order dari grup. Berdasarkan alasan ini, maka sangat mungkin ditemukan dua elemen dalam grup G katakan g dan h dimana $o(g)|o(h)$. Hal ini yang melatar belakangi munculnya definisi graf order elemen sebagai berikut.

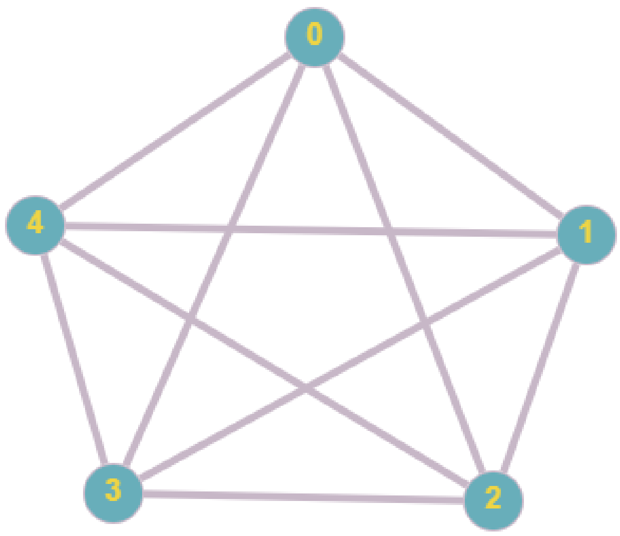
Definisi 3.1. Diberikan grup berhingga G. Graf order elemen (GOE) dari G adalah graf $\Gamma(G)$ dengan himpunan vertek adalah elemen dalam grup G dan elemen g insiden dengan h jika hanya jika $o(g)|o(h)$ atau $o(h)|o(g)$ dan $g \neq h$.

Berdasarkan definisi tersebut, jelas bahwa graf order elemen yang terbentuk tidak memuat loop ataupun rusuk berganda. Selain itu graf order elemen juga bukan graf berarah. Eksistensi dari graf order elemen cukup jelas dengan melihat bahwa setiap order dari elemen

 ISSN 2774-3241

akan membagi order dari grup yang artinya order dari setiap elemen merupakan faktor dari order grup.

Contoh 3.2. Misalkan $G = (Z_5, +)$ grup siklik dengan order 5. Misalkan $\Gamma(G)$ adalah graf order elemen dari G, maka $V(\Gamma) = \{0,1,2,3,4\}$. Kemudian karena order masing-masing elemen dalam G adalah $o(0) = 1, o(1) = o(2) = o(3) = 0(4) = 5$, maka $\Gamma(G)$ akan membentuk graf komplit K_5.



Gambar 1. Graf order elemen Z_5

Contoh di atas memberikan gambaran mengenai graf order elemen dari grup siklik dengan order prima yang di tuliskan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3. Diberikan G grup siklik berhingga dengan order prima $p > 2$. Graf order elemen dari G adalah graf komplit K_p.

Bukti. Karena $|G| = p$ dengan p bilangan prima, maka $o(g) \in \{1, p\}$ untuk setiap $g \in G$. Dengan demikian sebarang $g, h \in G$ saling terhubung satu dengan yang lainnya. Sehingga graf order elemen terbentuk adalah graf komplit dengan derajat setiap verteknya adalah $p - 1$. ■

Graf komplit mempunyai hubungan yang erat dengan graf Euler dan graf Hamilton. Sehingga teorema di atas memunculkan akibat berikut.

Akibat 3.4. Graf order elemen dari grup siklik berhingga dengan order prima $p > 2$ adalah graf Euler dan Hamilton.

Bukti. Misalkan Γ adalah graf order elemen dari grup siklik G. Jika $|G| = p$ dengan p prima dan $p > 2$, maka berdasar teorema 3.4 di atas graf order elemen yang terbentuk dari G adalah graf komplit dengan derajat setiap verteknya genap. Jadi graf Γ yang terbentuk adalah graf Euler.

 ISSN 2774-3241

Kemudian sebagai akibat dari Γ yang terbentuk merupakan graf komplit, maka Γ adalah graf Hamilton. ■

Graf order elemen dari grup siklik berorder $n = p^k$ dengan p bilangan prima juga merupakan graf komplit.

Teorema 3.5. Diberikan G adalah grup siklik dengan order $n = p^k$ untuk suatu k bilangan bulat dan p bilangan prima. Jika $\Gamma(G)$ adalah graf order elemen dari G, maka $\Gamma(G)$ merupakan graf komplit K_n.

Bukti. Misalkan G adalah adalah grup siklik dengan order $n = p^k$ untuk suatu k bilangan bulat dan p bilangan prima, maka G dibangun oleh satu elemen misalkan $a \in G$ sehingga $G = \{a^l | 1 < l < n\}$. Jelas bahwa untuk sebarang elemen $g \in G$, $o(g) \in \{1, p, p^2, \dots, p^k\}$ untuk suatu bilangan bulat k. Dengan demikian, $o(g)|o(h)$atau sebaliknya, untuk setiap $g, h \in G$. Jadi graf order elemen dari G adalah graf komplit K_n.■

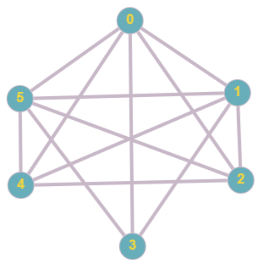
Karena sebarang graf komplit merupakan graf Hamilton, maka graf order elemen dari Z_{p^k} untuk suatu bilangan prima p dan bilangan bulat k adalah graf Hamilton. Dalam hal $p = 2$, maka GOE adari $G = Z_{p^k}$ bukanlah merupakan graf Euler. Sebab dalam hal $n = 2^k$, maka setiap vertek dalam $\Gamma(G)$ akan mempunyai derajat ganjil yang berarti bukan graf Euler.

Akibat 3.6. Graf order elemen dari grup siklik dengan order $n = p^k$ untuk suatu k bilangan bulat, dan $p > 2$ merupakan graf Hamilton dan graf Euler.

Bukti. Sejalan dengan bukti akibat 3.5. ■

Komplemen dari graf komplit tentu hanyalah graf yang berisi vertek tanpa adanya rusuk. Oleh karenanya diberikan contoh graf order elemen dari grup siklik dengan order tak prima, sebagai gambaran diberikan graf order elemen dari grup $G = (Z_6, +)$.

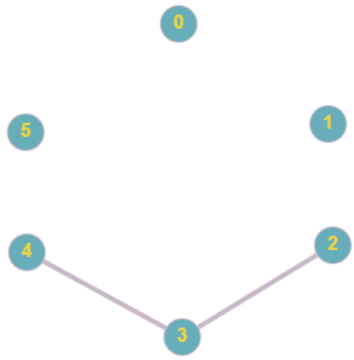
Contoh 3.7. Misalkan $G = (Z_6, +)$, sebuah grup siklik dengan order 6. Graf order elemen dari grup G adalah graf $\Gamma(G)$ dengan $V(\Gamma) = \{0,1,2,3,4,5\}$ dan sebagai akibat bahwa $o(0) = 1, o(1) = 6$, $o(2) = 3, o(3) = 2, o(4) = 3, o(5) = 5$, maka rusuk dari graf tersebut adalah $E(\Gamma) = \{01,02,03,04,05, 12,13,14,15,24,25,35, 45\}$.



Gambar 2. $\Gamma(Z_6)$

 ISSN 2774-3241

Sementara komplemen dari GOE(Z_6) adalah graf Γ^C dengan $V(\Gamma^C) = V(\Gamma)$ dan $E(\Gamma^C) = \{23, 34\}$.



Gambar 3. $\Gamma^C(Z_6)$

Contoh komplemen graf order elemen dari Z_6 yang dituliskan di atas memberikan gambaran mengenai teorema berikut:

Teorema 3.8. Misalkan G adalah grup siklik dengan order $n = 2p$ dengan p prima ganjil. Jika $\Gamma(G)$ adalah graf order elemen dari G, maka subgraf terhubung dari Γ^C adalah pohon.

Bukti. Misalkan G adalah grup siklik dengan order $n = 2p$ dengan p prima ganjil. Karena G siklik, maka G dibangun oleh suatu elemen misalkan $a \in G$, yaitu $G = \{a^k | 1 < k \leq n, a^n = e\}$. Jelas bahwa $o(g) \in \{1, 2, p, 2p\}$ untuk sebarang $g \in G$. Karena 2 dan p saling prima, maka satu-satunya elemen dalam G dengan order 2 hanyalah $a^p \in G$. Sementara elemen-elemen dengan order p dalam G adalah $\{a^l | l = 2m, 1 < m < p\}$. Jadi rusuk dari graf Γ^C adalah $E(\Gamma^C) = \{a^p a^l | l = 2m, 1 < m < p\}$. Artinya subgraf terhubung dari Γ^C adalah pohon dengan akar vertek a^p. ■

Simpulan

Graf Order Elemen (GOE) merupakan representasi grup berhingga pada graf dengan memandang anggota dari grup sebagai vertek dari graf dan dua vertek $\boldsymbol{g}$ dan $\boldsymbol{h}$ saling *adjacent* jika order $\boldsymbol{g}$ membagi $\boldsymbol{h}$ atau sebaliknya. GOE dari grup siklik dengan order prima merupakan graf komplit yang sekaligus merupakan graf Euler dan Hamilton. Sementara GOE dari grup siklik dibangun oleh satu elemen dengan order $\boldsymbol{n = p^k}$, untuk sebarang bilangan bulat $\boldsymbol{k}$ dan bilangan prima $\boldsymbol{p}$ merupakan graf komplit dan Hamilton, namun bukan graf Euler jika $\boldsymbol{p} =$

2. Sementara komplemen dari graf siklik dengan order $\boldsymbol{n = 2p}$ untuk suatu bilangan prima $\boldsymbol{p}$ merupakan graf pohon.

Daftar Pustaka

[1] Y. Luo, Y. Hao, and G. T. Clarke, "On the Cayley graphs of completely simple semigroups," in *Semigroup Forum*, 2011, vol. 82, no. 2, pp. 288–295.

[2] Y. Zhu, "Generalized Cayley graphs of semigroups I," in *Semigroup Forum*, 2012, vol. 84, no. 1, pp. 131–143.

[3] N. Hosseinzadeh and A. Assari, "Graph operations on Cayley graphs of semigroups," *Int. J. Appl. Math. Res.*, vol. 3, no. 1, p. 54, 2014.

[4] A. V Kelarev and S. J. Quinn, "Directed graphs and combinatorial properties of semigroups," *J. Algebr.*, vol. 251, no. 1, pp. 16–26, 2002.

[5] I. Chakrabarty, S. Ghosh, and M. K. Sen, "Undirected power graphs of semigroups," in *Semigroup Forum*, 2009, vol. 78, no. 3, pp. 410–426.

[6] P. J. Cameron and S. Ghosh, "The power graph of a finite group," *Discrete Math.*, vol. 311, no. 13, pp. 1220–1222, 2011.

[7] D. Alireza, E. Ahmad, and J. Abbas, "Some results on the power graphs of finite groups," *Sci. Asia*, vol. 41, no. 1, pp. 73–78, 2015.

[8] P. J. Cameron, H. Guerra, and Š. Jurina, "The power graph of a torsion-free group," *J. Algebr. Comb.*, vol. 49, no. 1, pp. 83–98, 2019.

[9] F. Ali, S. Fatima, and W. Wang, "On the power graphs of certain finite groups," *Linear Multilinear Algebr.*, pp. 1–15, 2020.

[10] B. N. Al-Hasanat, A. S. Al-Hasanat, and J. Ma'an, "Order Graph: A new representation of finite groups," *Comput. Sci.*, vol. 14, no. 4, pp. 809–819, 2019.

[11] A. Sehgal and D. Singh, "Co-Prime Order graph of a finite abelian Group and Dihedral Group," *arXiv Prepr. arXiv2003.09850*, 2020.

[12] S. U. Rehman, A. Q. Baig, M. Imran, and Z. U. Khan, "Order divisor graphs of finite groups," *arXiv Prepr. arXiv1611.04280*, 2016.

[13] J. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, 9th ed. Cengage Learning, 2016.

[14] J. L. Gross, J. Yellen, and M. Anderson, *Graph theory and its applications*. Chapman and Hall/CRC, 2018.

[15] K.-M. Koh, F. Dong, K. L. Ng, and E. G. Tay, *Graph Theory: Undergraduate Mathematics*. World Scientific Publishing Company, 2015.