UAD Universitas Ahmad Dahlan

Jurnal Ilmiah Matematika
Vol. 11, No. 1, Mei 2024, pp. 1-5
ISSN 2774-3241
http://journal.uad.ac.id/index.php/Konvergensi

Teorema titik tetap Chatterjea pada ruang Modular-2

Burhanudin Arif Nurnugroho*

Universitas Ahmad Dahlan, Indonesia;
burhannudin@pmat.uad.ac.id
*Correspondent Author

Received: *Revised:* *Accepted:*

KATAKUNCI

Titik tetap
Chattereja
Modular-2

ABSTRAK

Eksistensi dari suatu titik tetap merupakan salah satu tema penelitian pada analisis fungsional. Dengan semakin banyak munculnya ruang abstrak-ruang abtrak baru yang di kembangkan maka penelitian mengenai eksitensi titik tetap pada suatu pemetaan pada ruang abstrak tersebut juga menjadi topik penelitian yang menarik.

Terdapat berbagai teorema ataupun kondisi yang menjamin adanya titik tetap. Pada artikel ini, memperkenalan dan membuktikan mengenai teorema titik tetap Chatterjea pada ruang modular-2 (X_ρ, ρ). Modular-2 merupakan pengembangan dari modular. Kondisi penting yang dapat menjamin eksistensi ketunggalan suatu titik tetap adalah sifat kelengkapan modular-2 pada X_ρ dan terpenunihnya kondisi-Δ_2 pada ρ.

KEYWORDS

Fixed Point
Chattereja
2-modular

Chatterjea fixed point theorem on 2-modular Spaces

In this article, we introduce and prove the Chatterjea fixed point theorem on 2-modular spaces.

Pendahuluan

Salah satu topik penelitian dalam analisis fungsional adalah mengenai pemetaan kontraksi Banach yang merupakan sumber dari konsep teori titik tetap. Salah satu cabang topik penelitiannya adalah perumuman mengani prinsip pemetaan kontraksi Banach [1].

Diberikan (X, d) ruang metrik lengkap, pada [2][3], menyampaikan bahwa Chattrejea menyelidiki eksistensi dan ketunggalan titik tetap untuk pemetaan $T: X \to X$ yang memenuhi

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq \alpha\big[d\big(x, T(y)\big) + d\big(y, T(x)\big)\big]$$

untuk setiap $x, y \in X$, dengan $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

Pada tahun 1964, Gahler memperkenalkan konsep norma-2[4]. Diberikan X ruang linear real dengan $\dim(X) \geq 2$. Fungsional $\|.,.\|: X \times X \to [0, \infty)$ dikatakan norma-2, jika untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku

(i) $\|x, y\| = 0 \Leftrightarrow x, y\ saling\ tak\ bebas\ linear$;
(ii) $\|x, y\| = \|y, x\|$;
(iii) $\|\alpha x, y\| = |\alpha|\|x, y\|$;
(iv) $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$.

Pasangan $(X, \|.,.\|)$ selanjutnya disebut ruang bernorma-2.

Misiak[5] memperumum konsep norma-2 menjadi konsep norma-n. Selanjutnya Nakano pada tahun 1943 memperkenalkan konsep modular yang merupakan perumuman dari konsep norma dan pada tahun 1959, Musielak dan Orlicz pada ruang linear real [6]. Penelitian mengenai sifat-sifat ruang modular di bahas antara lain pada[7] .Mengikuti konsep norma-n, Nourozi dan Shabanian pada tahun 2009 memperkenalkan konsep modular-n[8]. Pada [9], telah di teliti mengenai sifat-sifat para ruang modular-2. Diberikan X ruang linear real dengan $\dim(X) \geq 2$. Fungsional $\rho(.,.): X \times X \to [0, \infty)$ dikatakan norma-2, jika untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku

(i) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x, y\ saling\ tak\ bebas\ linear$;
(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
(iii) $\rho(-x, y) = \rho(x, y)$;
(iv) $\rho(\alpha x + \beta y, z) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$, untuk setiap $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

Dalam hal kondisi (iv), diganti dengan
(v) $\rho(\alpha x + \beta y, z) \leq \alpha\rho(x, z) + \beta\rho(y, z)$, untuk setiap $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$,
modular-2 ρ dikatakan konveks.
Pasangan (X, ρ) disebut sebagai ruang modular-2.

Diberikan (X, ρ) ruang modular-2.

(i) Barisan (x_n) di dalam X dikatakan konvergen modular-2 (konvergen-ρ), jika
$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - x, z) = 0.$$
untuk setiap $z \in X$.
(ii) Barisan (x_n) disebut barisan Cauchy modular-2 (Cauchy-ρ), jika
$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n - x_m, z) = 0.$$
untuk setiap $z \in X$.
(iii) X dikatakan lengkap modular-2 (lengkap-ρ) , jika setiap barisan Cauchy-ρ di X, konvergen-ρ ke $x \in X$.
(iv) Modular ρ dikatakan memenuhi kondisi-Δ_2, jika terdapat $R > 0$, sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $\rho(2x, y) \leq R\rho(x, y)$. Selanjutnya dalam penelitian ini R disebut konstanta kondisi-Δ_2.

Selanjutnya di definisikan
$$X_\rho = \{x \in X: \rho(\lambda x, y) < \infty, untuk\ \ suatu\ \lambda > 0, setiap\ y \in X\}$$
Dapat dibuktikan bahwa X_ρ merupakan ruang linear real dan (X_ρ, ρ) ruang modular-2.

Pada Kir & Kiziltunc [10], Malčeski [11] dan Stephen & Nelson [12] telah dibahas mengenai teorema titik tetap ada ruang bernorma-2. Penelitian mengenai teorema titik tetap dapat dilihat pada [13-16]. Pada penelitian ini akan dibahas teorema titik tetap Chattrejea pada ruang modular-2. Akan dibuktikan teorema eksistensi dan ketunggalannya.

Metode

Penelitian ini merukan penelitian studi literatur. Penelitian dilakukan dengan mengkonstruksi teorema titik tetap Chattrejea pada ruang modular-2.

Hasil dan Pembahasan

Berikut diberikan hasil penelitian mengenai teorema titik tetap Chattrejea pada ruang modular-2.

Teorema 1. Diberikan (X_ρ, ρ) ruang modular-2 lengkap dengan ρ memenuhi kondisi-Δ_2. Jika pemetaan $T: X_\rho \to X_\rho$ memenuhi
$$\rho(T(x) - T(y), z) \leq \beta[\rho(x - T(y), z) + \ \rho(y - T(x), z]$$

untuk setiap $x, y, z \in X_\rho$, dengan $\beta \in \left[0, \frac{1}{2R}\right)$, R konstanta kondisi-Δ_2, maka T memiliki titik tetap tunggal.

Bukti. Di ambil $x_0 \in X_\rho$, dibentuk barisan (x_n) di dalam X_ρ dengan

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), n = 1,2,3, \cdots.$$

Diketahui ρ memenuhi kondisi-Δ_2 dengan konstanta R, maka

$$\begin{aligned}
\rho(x_n - x_{n+1}, z) &= \rho(T(x_{n-1}) \ - T(x_n), z) \\
&\leq \beta[\rho(x_{n-1} - T(x_n), z\ ) + \rho(x_n - T(x_{n-1}), z\ )] \\
&= \beta[\rho(x_{n-1} - x_{n+1}, z\ ) + \rho(x_n - x_n, z\ )] \\
&= \beta\rho(x_{n-1} - x_{n+1}, z\ ) \\
&= \beta\rho\left(\frac{1}{2}\big(2(x_{n-1} - x_n)\big) + \frac{1}{2}\big(2(x_n - x_{n+1})\big), z\right) \\
&\leq \beta\rho(2(x_{n-1} - x_n), z) + \rho(\ 2(x_n - x_{n+1}), z\ ) \\
&\leq \beta R\rho(x_{n-1} - x_n, z) + \beta R\rho(x_n - x_{n+1}, z)
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
&(1 - \beta R)\rho(x_n - x_{n+1}, z) \leq \beta R\rho(x_{n-1} - x_n, z) \\
&\Leftrightarrow \rho(x_n - x_{n+1}, z) \leq \frac{\beta R}{1 - \beta R}\, \rho(x_{n-1} - x_n, z).
\end{aligned}$$

Karena $\beta \in \left[0, \frac{1}{2R}\right)$, maka $k = \frac{\beta R}{1-\beta R} \in [0,1)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\rho(x_n - x_{n+1}, z) &\leq k\ \rho(x_{n-1} - x_n, z) \\
&\leq k^2\rho(x_{n-2} - x_{n-1}, z) \\
&\leq k^2\rho(x_{n-2} - x_{n-1}\,, z) \\
&\ \ \vdots \\
&\leq k^n\rho(x_0 - x_1, z).
\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk sebarang $m, n \in \mathbb{N}$, dengan $m > n, h = m - n$, berlaku

$$\begin{aligned}
\rho(x_n - x_m, z) &= \ \rho\big((x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m)\ , z\big) \\
&= \rho\left(\frac{1}{h}\big(h(x_n - x_{n+1})\big) + \frac{1}{h}\big(h(x_{n+1} - x_{n+2})\big) \ \ + \cdots + \frac{1}{h}\big(h(x_{m-1} - x_m)\big)\ , z\right) \\
&\leq \rho(h(x_n - x_{n+1}), z) + \rho(h(x_{n+1} - x_{n+2}), z) + \cdots + \rho(h(x_{m-1} - x_m), z) \\
&\leq \rho(2^w(x_n - x_{n+1}), z) + \rho(2^w(x_{n+1} - x_{n+2}), z) + \cdots \\
&\quad + \rho(2^w(x_{m-1} - x_m), z), suatu\ w \in \mathbb{N} \\
&\leq R^w[\rho(x_n - x_{n+1}, z) + \rho(x_{n+1} - x_{n+2}, z) + \cdots + \rho(x_{m-1} - x_m, z)] \\
&\leq R^w k^n[1 + k^2 + k^3 + \cdots]\rho(x_0 - x_1, z) \\
&= R^w k^n \left(\frac{1}{1 - k}\right)\rho(x_0 - x_1, z).
\end{aligned}$$

Dengan demikian

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n - x_m, z) = 0.$$

Dapat disimpulkan bahwa barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy-ρ. Mengingat X_ρ lengkap-ρ maka barisan (x_n) konvergen-ρ ke $x \in X_\rho$, atau

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - x, z) = 0.$$

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa x merupakan titik tetap T. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\rho(T(x) - x, z) &= \rho\left(\frac{1}{2}\big(2(T(x) - x_{n+1})\big) + \frac{1}{2}\big(2(x_{n+1} - x)\big), z\right) \\
&\leq \rho(2(T(x) - x_n), z) + \rho(2(x_{n+1} - x), z) \\
&\leq R\rho(T(x) - x_{n+1}, z) + R\rho(x_{n+1} - x, z) \\
&= R\rho(T(x) - T(x_n), z) + R\rho(x_{n+1} - x, z) \\
&\leq R\beta[\rho(x - T(x_n), z) + \rho(x_n - T(x), z)] + R\rho(x_{n+1} - x, z) \\
&= R\beta[\rho(x - x_{n+1}, z) + \rho(x_n - x + x - T(x), z)] + R\rho(x_{n+1} - x, z)
\end{aligned}$$

 ISSN 2774-3241

$$
\begin{aligned}
&= R\beta\left[\rho(x - x_{n+1}, z) + \rho\left(\frac{1}{2}(2(x_n - x) + \frac{1}{2}(2(x - T(x))), z\right)\right] \\
&\quad + R\rho(x_{n+1} - x, z) \\
&\leq\ R\beta\big[\rho(x - x_{n+1}, z) + \rho(2(x_n - x), z) + \rho\big(2\big(x - T(x)\big), z\big)\big] + R\rho(x_{n+1} - x, z) \\
&\leq\ R\beta[\rho(x - x_{n+1}, z) + R\rho(x_n - x\ , z) + R\rho(x - T(x), z)] + R\rho(x_{n+1} - x, z) \\
&= R\beta\rho(x - x_{n+1}, z) + R^2\beta\rho(x_n - x\ , z) + R^2\beta\rho(x - T(x), z) + R\rho(x_{n+1} - x, z)
\end{aligned}
$$

Jika diambil $n \to \infty$ diperoleh

$$\rho(T(x) - x, z) \leq R^2\beta\rho(x - T(x), z)$$

Pertidaksamaan ini bernilai benar jika $\rho(x - T(x), z) = 0$, dengan kata lain $T(x) = x$. Terbukti x titik tetap T. Selanjutnya akan di tunjukan bahwa titik tetapnya tunggal. Misalkan $x' \neq x$ juga merupakan titik tetap T. Diperhatikan bahwa $x' = T(x')$, dan berlaku

$$
\begin{aligned}
\rho(x - x', z) &= \rho(T(x) - T(x'), z) \\
&\leq \beta[\rho(x - T(x'), z) + \rho(x' - T(x), z] \\
&= \beta[\rho(x - x', z) + \rho(x' - x, z)] \\
&= 2\beta\rho(x - x', z)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $\rho(x - x', z) = 0$. Artinya $x = x'$, dengan kata lain titik tetap T tunggal.

Simpulan

Dapat dikontruksikan dan dapat dibuktikan teorema titik tetap Chattereja pada ruang modular-2.

Daftar Pustaka

[1] J. Harjani, B. López, and K. Sadarangani, "Fixed point theorems for weakly C-contractive mappings in ordered metric spaces," *Comput. Math. with Appl.*, vol. 61, no. 4, pp. 790–796, 2011, doi: 10.1016/j.camwa.2010.12.027.

[2] H. Faraji and K. Nourouzi, "A GENERALIZATION OF KANNAN AND CHATTERJEA FIXED POINT THEOREMS ON COMPLETE b-METRIC SPACES," *Sahand Commun. Math. Anal.*, vol. 6, no. 1, pp. 77–86, 2017, [Online]. Available: http://scma.maragheh.ac.ir

[3] K. Fallahi and A. Aghanians, "Fixed points for Chatterjea contractions on a metric space with a graph.," *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, vol. 7, no. 2, pp. 49–58, 2016.

[4] V. S. Gahler, "Lineare 2-normierte Raume," *Math. Nachr.*, vol. 28, no. 1–2, pp. 1–43, 1963.

[5] A. Misiak, "n-Inner Product Spaces")," vol. 140, pp. 299–319, 1989.

[6] L. Maligranda, "Hidegoro Nakano (1909-1974)-on the centenary of his birth," in *International Symposium on Banach and Function Spaces: 14/09/2009-17/09/2009*, 2011, pp. 99--171.

[7] J. Musielak and W. Orlicz, "On modular spaces," *Studia Mathematica*, vol. 18, no. 1. pp. 49–65, 1959. doi: 10.4064/sm-18-1-49-65.

[8] K. Nourouzi and S. Shabanian, "Operators defined on n-modular spaces," *Mediterr. J. Math.*, vol. 6, no. 4, pp. 431–446, Nov. 2009, doi: 10.1007/s00009-009-0016-5.

[9] B. A. Nurnugroho, Supama, and A. Zulijanto, "2-linear operators on 2-modular spaces," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 102, no. 12, pp. 3193–3210, 2017, doi: 10.17654/MS102123193.

[10] M. Kir and H. Kiziltunc, "Some new fixed point theorems in 2-normed spaces," *Int. J. Math. Anal.*, vol. 7, pp. 2885–2890, 2013, doi: 10.12988/ijma.2013.310240.

[11] S. Malčeski, "Some New Fixed Point Theorems in 2-Banach Spaces," *Математички Билтен/Bulletin Mathématique La Société Des Mathématiciens La République Macédoine*, no. 2, pp. 46–53, 2017, doi: 10.37560/matbil17200046m.

[12] L. N. S. N, "Fixed Point Theorem of Self mapping in a Complete 2-Banach Space," vol. 2, no. 1, pp. 37–42, 2014.

[13] M. Kiftiah and Supama, "Fixed point theorems for modular contraction mappings on modulared

ISSN 2774-3241

spaces," *Int. J. Math. Anal.*, vol. 7, no. 17–20, pp. 965–972, 2013, doi: 10.12988/ijma.2013.13094.

[14] M. A. Khamsi and W. M. Kozlowski, *Fixed point theory in modular function spaces*. Springer International Publishing, 2015. doi: 10.1007/978-3-319-14051-3.

[15] A. P. Farajzadeh, M. B. Mohammadi, and M. A. Noor, "Fixed point theorems in modular spaces," 2011. [Online]. Available: http://www.mathos.hr/mc

[16] F. Lael and K. Nourouzi, "On the Fixed Points of Correspondences in Modular Spaces," *ISRN Geom.*, vol. 2011, pp. 1–7, Jun. 2011, doi: 10.5402/2011/530254.