Jurnal Ilmiah Matematika
Vol. 11, No. 1, Mei 2024, pp. 20-32
ISSN 2774-3241
http://journal.uad.ac.id/index.php/Konvergensi

BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF $C_n \odot P_1$

Deddy Rahmadi [a,1,*], Muhammad Luthfi Kamal [b,2], Dhiya Anisah Utami [b,2] Alvian Nur Rohman [b,2], Muhammad Ridho Ramadhan [b,2]

[*a] Mathematics Departement, UIN Sunan Kalijaga, Indonesia;
[b] Student of Mathematics Departement, UIN Sunan Kalijaga, Indonesia;
[1] deddy.rahmadi@uin-suka.ac.id ; [2,3,4,5] 20106010048@student.uin-suka.ac.id
*Correspondent Author

Received: *Revised:* *Accepted:*

KATAKUNCI
Bilangan kromatik lokasi
Graf hasil korona
Pewarnaan lokasi
path
cycle

ABSTRAK

Bilangan kromatik lokasi suatu graf merupakan perluasan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan titik pada suatu graf. Jumlah minimum warna yang diperlukan untuk melakukan pewarnaan lokasi pada graf disebut bilangan kromatik lokasi graf. Penelitian ini merupakan studi literatur yang membahas tentang bilangan kromatik lokasi pada graf $C_n \odot P_1$. Pendekatan yang digunakan untuk menghitung bilangan kromatik lokasi adalah melibatkan penentuan batas atas dan bawah.

A title should be the fewest possible words that accurately describe the content of the paper (Cambria, left, italic, 14pt)

The location chromatic number of a graph is an extension of the concept of partition dimensions and point coloring in a graph. The minimum number of colors required to color a location on a graph is called the chromatic number of the graph location. This research is a literature study that discusses chromatic number locations on graphs $C_n \odot P_1$. The approach used to calculate a location's chromatic number involves determining upper and lower limits.

KEYWORDS

Locating chromatic number
Coronation graph
Coloring locating
Lintasan
Cycle

Pendahuluan

Matematika menjadi ilmu yang sangat dibutuhkan dalam kehidupan manusia, salah satunya adalah ilmu geografi. Pada geografi terdapat alat yang sangat penting yaitu peta. Peta merupakan gambaran muka bumi yang disederhanakan dan diperkecil dengan skala tertentu serta pamakaian simbol atau warna untuk mempermudah memahaminya. Pada dasarnya, matematika merupakan alat yang sangat penting untuk memecahkan masalah yang kompleks menggunakan pemodelan matematika. Model matematika sangat bermanfaat untuk mendeskripsikan dan menganalisis kejadian dunia nyata, seperti pemetaan, menetukan rute terpendek, eksplorasi beberapa kejadian lain. Teori graf adalah salah satu cabang penting dari ilmu matematika yang sedang berkembang [1].

Graf digunakan untuk merepresentasikan beberapa situasi di dunia nyata, seperti analisis jaringan sosial [2]. Penelitian pada bidang teori graf, memberikan beberapa kontribusi penting, diantaranya adalah ilmu komputer, optimisasi, logistik, dan jaringan.

Salah satu topik dalam teori graf adalah pewarnaan lokasi pada graf, dimana hal ini adalah pengembangan dari pewarnaan titik dan dimensi partisi pada graf [3]. Beberapa penelitian yang terinspirasi oleh [3] diantaranya dimensi metrik pada graf roda dan variasinya [4], dimensi k-metrik dan dimensi metrik campuran pada graf double fan [5,6].

Pewarnaan lokasi pada graf, adalah metode untuk menentukan bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk mewarnai selutuh titik pada graf, dengan syarat bahwa tidak ada dua titik yang bertetangga diberi warna berbeda. [7]. Pewarnaan titik memiliki beberapa kegunaan di dunia nyata seperti penjadwalan, penenuan frekuensi radio, dan permainan.

Pewarnaan titik suatu graf adalah pemberian warna ke semua titik pada suatu graf, dengan ketentuan setiap titik yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan titik pada suatu graf disebut bilangan kromatik yang dinotasikan dengan χ(G)[7]. Permasalahan bilangan kromatik lokasi untuk sebarang graf termasuk dalam permasalahan NP-complete. Hal ini berarti bahwa permasalahan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf tidak dapat diselesaikan dengan algoritma yang efisien. Beberapa peneliti telah melakukan penelitian terkait bilangan kromatk lokasi pada beberapa graf seperti graf lintasan, graf cycle, graf multipartite, dan graf bistar oleh [7], hasil operasi amalgamasi dari graf bintang oleh [8], graf firecracker [9], graf barbell [10], graf buku [11], graf origrami [12], graf mobius ladder [13], graf m-shadows [14], dan graf pizza [15]. Beberapa batas atas dari bilangan kromatik lokasi telah dikembangkan oleh beberapa penulis [16,17,18,19].

Sejauh penelusuran literatur belum terdapat penelitian tentang bilangan kromatik lokasi dari graf hasil operasi korona pada graf siklus dan graf lintasan. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan membahas tentang bilangan kromatik lokasi dari graf hasil operasi korona pada graf siklus dan graf lintasan.

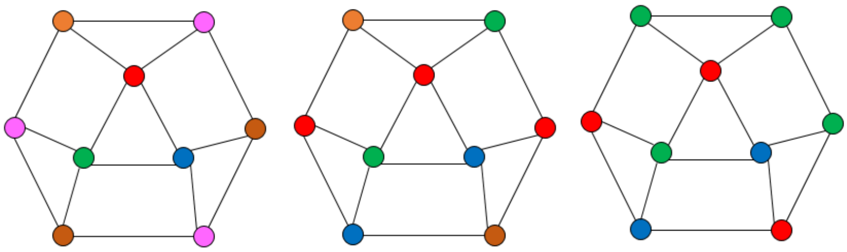
Metode

Pewarnaan Graf dan Bilangan Kromatik

Pewarnaan titik pada suatu graf $G = (V, E)$ merupakan suatu pemetaan $c: V \to \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ untuk setiap $u, v \in V(G)$ yang bertetangga. Jika setiap warna yang digunakan sebanyak k warna, maka graf G memiliki k-pewarnaan. Bilangan kromatik, dinotasikan $x(G)$, adalah bilangan bulat terkecil k sehingga graf G mempunyai pewarnaan titik

 ISSN 2774-3241

sejati dengan k warna. Sedangkan, pewarnaan titik sejati dari graf $G = (V, E)$ dengan k warna adalah suatu pemetaan $c: V(G) \to \{1,2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ untuk setiap u dan v yang bertetangga di G.



Gambar 1.1. Pewarnaan pada Graf H

Berdasarkan Gambar 1.1, banyaknya cara melakukan pewarnaan pada graf H adalah 3 cara, yaitu, 5 warna, 4 warna, dan 3 warna. Karena syarat bilangan kromatik adalah bilangan terkecil k sedemikian sehingga H memiliki suatu k-pewarnaan, maka $\chi(H) = 3$.

Bilangan kromatik lokasi merupakan pengembangan dari pewarnaan titik dan dimensi partisi suatu graf yang pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk (2002).

Bilangan Kromatik Lokasi

Pewarnaan titik (*vertex* coloring) pada graf $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu k-pewarnaan dari graf G. Misalkan $\prod = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ yang diinduksi oleh c, dengan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna ke-*i.* Kode warna $c_{11}(v)$ dari titik v adalah k-pasangan terurut $\big(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)\big)$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Secara khusus, jika $d(v, U) \neq d(w, U)$ untuk suatu himpunan U maka kita katakan bahwa v dan w *dibedakan* oleh U atau v dan w *terbedakan*. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut k-pewarnaan lokasi dari G.

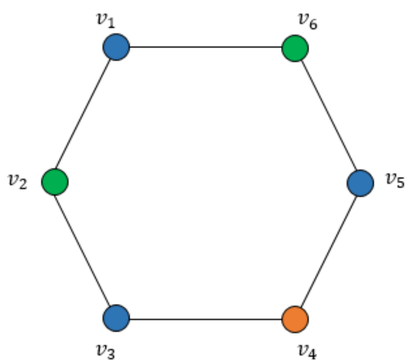
Bilangan kromatik lokasi (*location chromatic number*) dari graf G, dinotasikan dengan $X_L(G)$, didefinisikan sebagai banyak warna minimum atau bilangan asli terkecil k yang dapat digunakan dalam pewarnaan lokasi dengan kardinalitas k untuk G. Karena setiap pewarnaan lokasi merupakan suatu pewarnaan, maka $X(G) \leq X_L(G)$ untuk setiap graf terhubung G. (Chartrand, dkk) menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa graf seperti lintasan, siklus, graf multipartit lengkap dan graf bintang ganda.

Teorema 2.1 *Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan $N(v)$ merupakan himpunan adjecent dari titik v. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) = \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.*

Bukti.

Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G kedalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) = \{u, v\}$ maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi $c(u) \neq c(v)$

Contoh 2.1 Misalkan diberikan suatu graf G_2 dengan $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Memiliki kelas warna $\Pi = \{C_1, C_2, C_3\}$, dengan partisi $C_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$, $C_2 = \{v_2, v_6\}$, dan $C_3 = \{v_4\}$. Selanjutnya akan diperoleh kode warna sebagai berikut:

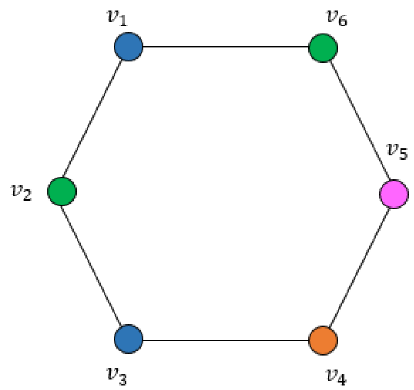


Gambar 2.1 Pewarnaan kromatik lokasi Graf G_2 dengan 3 warna

1. $c_\Pi(v_1) = \big(d(v_1, C_1), d(v_1, C_2), d(v_1, C_3)\big) = (0,1,3)$
2. $c_\Pi(v_2) = \big(d(v_2, C_1), d(v_2, C_2), d(v_2, C_3)\big) = (1,0,2)$
3. $c_\Pi(v_3) = \big(d(v_3, C_1), d(v_3, C_2), d(v_3, C_3)\big) = (0,1,1)$
4. $c_\Pi(v_4) = \big(d(v_4, C_1), d(v_4, C_2), d(v_4, C_3)\big) = (1,2,0)$
5. $c_\Pi(v_5) = \big(d(v_5, C_1), d(v_5, C_2), d(v_5, C_3)\big) = (0,1,1)$
6. $c_\Pi(v_6) = \big(d(v_6, C_1), d(v_6, C_2), d(v_6, C_3)\big) = (1,0,2)$

Graf G_2 memiliki titik dengan kode warna yang sama, yaitu $c\Pi(v_2) = c_\Pi(v_6)$ dan $c_\Pi(v_3) = c_\Pi(v_5)$, sehingga tidak memenuhi syarat pewarnaan lokasi pada graf G_2, akibatnya graf G_2 membutuhkan pewarnaan baru yaitu C_4.

Misalkan terdapat graf G_3 dengan kelas warna $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, dengan partisi $C_1 = \{v_1, v_3\}, C_2 = \{v_2, v_6\}, C_3 = \{v_4\}$, dan $C_4 = \{v_5\}$. Selanjutnya akan diperoleh kode warna sebagai berikut:

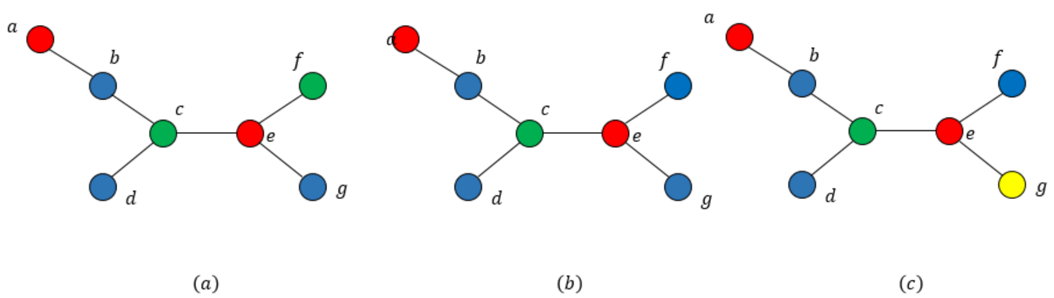


Gambar 2.2 Pewarnaan kromatik lokasi Graf G_3 dengan 4 warna

1. $c_\Pi(v_1) = \big(d(v_1, C_1), d(v_1, C_2), d(v_1, C_3), d(v_1, C_4)\big) = (0,1,3,2)$
2. $c_\Pi(v_2) = \big(d(v_2, C_1), d(v_2, C_2), d(v_2, C_3), d(v_2, C_4)\big) = (1,0,2,3)$
3. $c_\Pi(v_3) = \big(d(v_3, C_1), d(v_3, C_2), d(v_3, C_3), d(v_3, C_4)\big) = (0,1,1,2)$
4. $c_\Pi(v_4) = \big(d(v_4, C_1), d(v_4, C_2), d(v_4, C_3), d(v_4, C_4)\big) = (1,2,0,1)$
5. $c_\Pi(v_5) = \big(d(v_5, C_1), d(v_5, C_2), d(v_5, C_3), d(v_5, C_4)\big) = (2,1,1,0)$
6. $c_\Pi(v_6) = \big(d(v_6, C_1), d(v_6, C_2), d(v_6, C_3), d(v_6, C_4)\big) = (1,0,2,1)$

Graf G_3 memiliki titik dengan kode warna yang berbeda. Maka Π dengan 4 warna adalah bilangan kromatik lokasi pada graf G_3 sehingga $\mathcal{X}_L(G_3) = 4$

Contoh (Pewarnaan pada Graf G)



Gambar 2.3 Partisi pada graf G_3

Gambar 2.3 tersebut menunjukkan suatu partisi $\prod$ dari $V(G)$.

1. Pada gambar a, partisi $\Pi_1 = \{C_1, C_2, C_3\}$ dengan $C_1 = \{c, f\}$, $C_2 = \{b, d, g\}$, dan $C_3 = \{a, e\}$ adalah 3-pewarnaan lokasi pada graf G karena setiap titik mempunyai kode warna yang berbeda.
2. Pada Gambar (b), partisi $\Pi_2 = \{C_1, C_2, C_3\}$ dengan $C_1 = \{c, f, g\}$, $C_2 = \{b, d\}$, dan $C_3 = \{a, e\}$ bukan merupakan pewarnaan lokasi karena $c_\Pi(f) = c_\Pi(g) = (0,3,1)$.
3. Pada gambar (c), Partisi $\Pi_3 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{c, f\}, C_2 = \{b, d\}, C_3 = \{a, e\}$, dan $C_4 = \{g\}$ merupakan pewarnaan lokasi karena setiap titik mempunyai kode warna

yang berebeda. Tetapi pada pewarnaan ini tidak minimum karena terdapat Π_1 yang kardinalitasnya lebih kecil. Karena orde dari graf G lebih dari dua, maka $\mathcal{X}_L(G) \geq 3$. Dengan demikian, pewarnaan seperti pada gambar (a) merupakan pewarnaan lokasi minimum pada graf G. Jadi, dapat kita simpulkan bahwa $\mathcal{X}_L(G) = 3$.

Diketahui bahwa setiap pewarnaan lokasi juga merupakan suatu pewarnaan pada G, maka berlaku $\mathcal{X}(G) \leq \mathcal{X}_L(G)$ untuk setiap graf terhubung G. Penentuan bilangan kromatik lokasi dari sebarang graf merupakan masalah NP-*hard*. Hal ini berarti tidak ada algoritma yang efisien untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari sebarang graf, bahkan kita tidak dapat secara baik menaksir berapa bilangan kromatik lokasi dari grafsebarang yang diberikan. Oleh karena itu, banyak pendekatan secara *heuristic* telah dibuat untuk menentukan parameter graf ini.

Hasil dan Pembahasan

Definisi 3.1

Suatu graf simpel dengan n vertex $(n \geq 3)$ dan n edge membentuk sebuah *cycle* dari panjang n disebut dengan graf *cycle*. Dalam graf cycle semua vertex berderajat 2.

Definisi 3.2

Graf lintasan $P_k(G)$ dari suatu graf G terdiri dari himpunan vertex $\prod_k(G)$ dan himpunan edge yang menghubungkan pasangan vertex, merepresentasikan dua lintasan P_k. Gabungan dari dua lintasan tersebut membentuk atau lintasan P_{k+1} atau cycle C_k dalam G. Suatu graf disebut sebagai graf P_k jika graf tersebut isomofik dengan $P_k(H)$ untuk suatu graf H.

Definisi 3.3

Misalkan terdapat graf G dan H sebarang. Graf hasil korona antara graf G dan H dinotasikan dengan $G \odot H$. Misalkan $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dan $V(H_i) = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}\}$, dimana H_i adalah duplikat ke-i dari graf H. Maka graf $G \odot H$ mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i=1}^{n} V(H_i),$$

$$E(G \odot H) = E(G) \cup \bigcup_{i=1}^{n} E(H_i) \cup \{x_i, a_{ij} | 1 \leq j \leq m, a_i \in V(H_i)\},$$

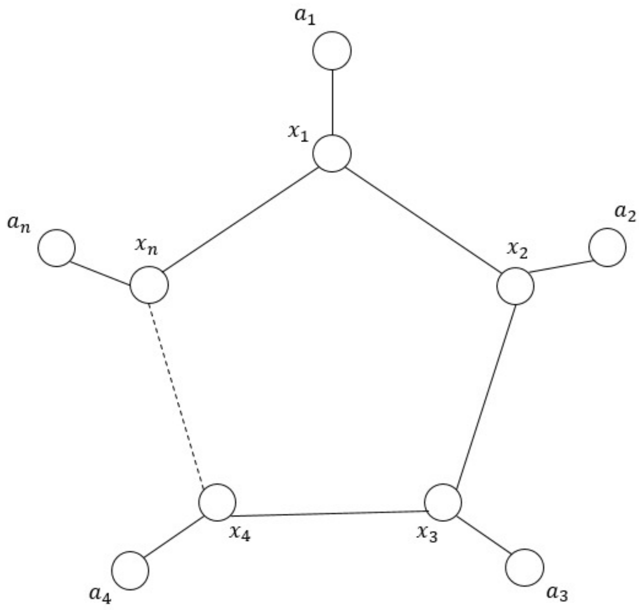
Dengan H_i adalah duplikat dari graf H. Dapat dilihat bahwa:

 ISSN 2774-3241

$$|V(G \odot H)| = |V(G)| + |V(G)| \cdot |V(H)|,$$
$$|E(G \odot H)| = |E(G)| + |V(G)| \cdot |E(H)| + |V(G)| \cdot |V(H)|.$$

Bilangan Kromatik Lokasi dari Graf $C_n \odot P_1$

Graf $C_n \odot P_n$ adalah graf yang diperoleh dari graf siklus C_n dengan n titik dan sebanyak n buah duplikat dari graf lintasan P_1, dengan cara menghubungkan titik di duplikat P_1 ke-i ke titik x_i di graf C_n, untuk $i = 1,2, \dots, n$. Dalam pembahasan ini akan dikaji mengenai bilangan kromatik lokasi untuk graf $C_n \odot P_1$ dengan $n \geq 3$. Perhatikan graf $C_n \odot P_1$ pada Gambar 4.1.



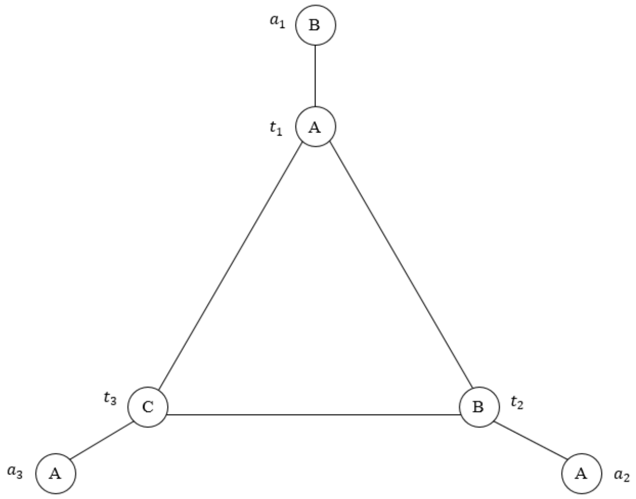
Gambar 3.1 Graf $C_n \odot P_1, n \geq 3$

Teorema 3.1 *Untuk $n \geq 3$, bilangan kromatik lokasi dari $C_n \odot P_1$ adalah sebagai berikut.*

$$X_L(C_n \odot P_1) = \begin{cases} 3, & jika\ 3 \leq n \leq 5, \\ 4, & jika\ n \geq 6. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $V(C_n \odot P_1) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup V(H_1) \cup V(H_2) \cup \dots \cup V(H_n)$, dimana $V(H_i) = \{a_{ij} | 1 \leq j \leq m\}$ adalah himpunan titik dari duplikat ke-i di P_1. Dari Teorema 1, setiap dua titik di $V(H_i)$ harus berada dalam kelas warna yang berbeda. Karena x_i adjecent dengan semua titik di H_i, maka x_i harus berada dalam kelas warna yang berbeda dari titik di $V(H_i)$. Sehingga, $X_L(C_n \odot P_1) \geq 3$.

Contoh 3.1 Untuk $3 \leq n \leq 5$, jelas bahwa $\chi_L(C_n \odot P_1) \geq 3$. Untuk $C_3 \odot P_1$ akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(C_3 \odot P_1) = 3$, seperti pada gambar berikut



Gambar 3.2 Graf $C_3 \odot P_1$

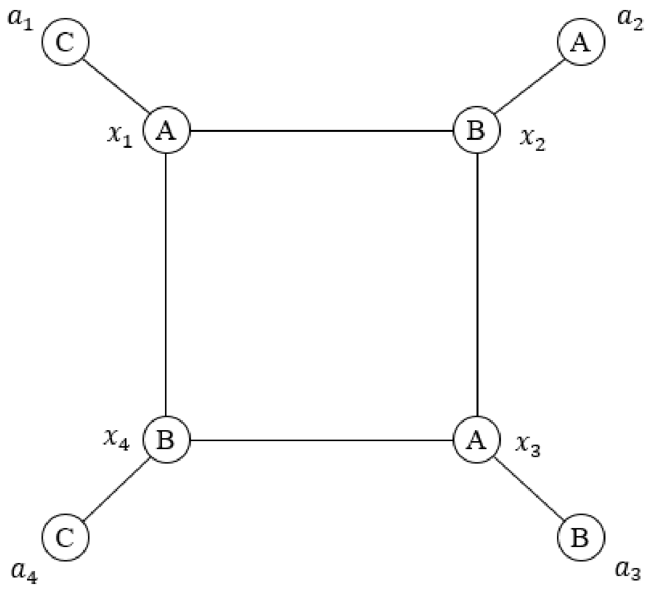
Berdasarkan gambar 4.2 di atas, diperoleh konstruksi kelas warna sebagai berikut

- $S_1 = \{t_1, a_2, a_3\}$
- $S_2 = \{t_2, a_1\}$
- $S_3 = \{t_3\}$

Untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(C_3 \odot P_1) = 3$, cukup dengan menunjukkan bahwa pewarnaan titik yang diberikan berikut memenuhi pewarnaan lokasi. Diperoleh kode warna sebagai berikut:

- $c_\Pi(t_1) = \big(d(t_1, S_1), d(t_1, S_2), d(t_1, S_3)\big) = (0,1,1)$.
- $c_\Pi(t_2) = \big(d(t_2, S_1), d(t_2, S_2), d(t_2, S_3)\big) = (1,0,1)$.
- $c_\Pi(t_3) = \big(d(t_3, S_1), d(t_3, S_2), d(t_3, S_3)\big) = (1,0,2)$.
- $c_\Pi(a_1) = \big(d(a_1, S_1), d(a_1, S_2), d(a_1, S_3)\big) = (1,0,2)$.
- $c_\Pi(a_2) = \big(d(a_2, S_1), d(a_2, S_2), d(a_2, S_3)\big) = (0,1,2)$.
- $c_\Pi(a_3) = \big(d(a_3, S_1), d(a_3, S_2), d(a_3, S_3)\big) = (0,2,1)$.

Karena setiap verteks pada $C_3 \odot P_1$ memiliki kode warna yang berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi pada graf $C_3 \odot P_1$. Sehingga, bilangan kromatik lokasi $\chi_L(C_3 \odot P_1) = 3$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(C_4 \odot P_1) = 3$, seperti gambar di bawah ini:



Gambar 3.3 Graf $C_4 \odot P_1$

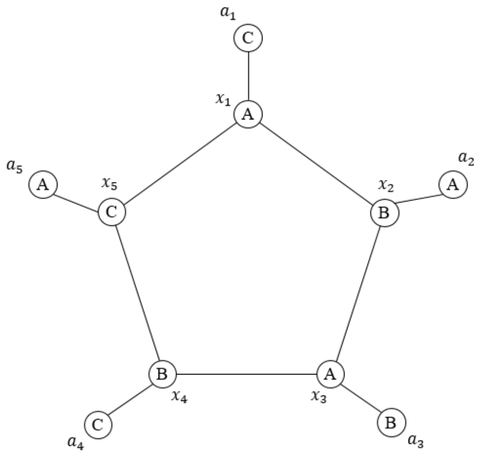
Berdasarkan gambar 4.3 di atas, diperoleh konstruksi kelas warna sebagai berikut

- $S_1 = \{x_1, x_2, a_2\}$
- $S_2 = \{x_2, x_4, a_3\}$
- $S_3 = \{a_1, a_4\}$

Untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(C_3 \odot P_1) = 3$, cukup dengan menunjukkan bahwa pewarnaan titik yang diberikan berikut memenuhi pewarnaan lokasi. Diperoleh kode warna sebagai berikut:

- $c_\Pi(x_1) = \big(d(x_1, S_1), d(x_1, S_2), d(x_1, S_3)\big) = (0,1,1)$.
- $c_\Pi(x_2) = \big(d(x_2, S_1), d(x_2, S_2), d(x_2, S_3)\big) = (1,0,1)$.
- $c_\Pi(x_3) = \big(d(x_3, S_1), d(x_3, S_2), d(x_3, S_3)\big) = (0,1,2)$.
- $c_\Pi(x_4) = \big(d(x_4, S_1), d(x_4, S_2), d(x_4, S_3)\big) = (1,0,1)$.
- $c_\Pi(a_1) = \big(d(a_1, S_1), d(a_1, S_2), d(a_1, S_3)\big) = (1,2,0)$.
- $c_\Pi(a_2) = \big(d(a_2, S_1), d(a_2, S_2), d(a_2, S_3)\big) = (0,1,3)$.
- $c_\Pi(a_3) = \big(d(a_3, S_1), d(a_3, S_2), d(a_3, S_3)\big) = (1,0,3)$.
- $c_\Pi(a_4) = \big(d(a_4, S_1), d(a_4, S_2), d(a_4, S_3)\big) = (2,1,0)$.

Karena setiap verteks pada $C_4 \odot P_1$ memiliki kode warna yang berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi pada graf $C_4 \odot P_1$. Sehingga, bilangan kromatik lokasi $\chi_L(C_4 \odot P_1) = 3$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $C_5 \odot P_1$, berlaku $\chi_L(C_5 \odot P_1) = 3$, seperti pada gambar berikut:



Gambar 3.4 Graf $C_5 \odot P_1$

Berdasarkan gambar 4.4 di atas, diperoleh konstruksi kelas warna sebagai berikut

- $S_1 = \{x_1, x_3, a_2\}$
- $S_2 = \{x_2, x_4, a_3\}$
- $S_3 = \{a_1, a_4\}$

Untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(C_3 \odot P_1) = 3$, cukup dengan menunjukkan bahwa pewarnaan titik yang diberikan berikut memenuhi pewarnaan lokasi. Diperoleh kode warna sebagai berikut:

- $c_\Pi(x_1) = \big(d(x_1, S_1), d(x_1, S_2), d(x_1, S_3)\big) = (0,1,1)$.
- $c_\Pi(x_2) = \big(d(x_2, S_1), d(x_2, S_2), d(x_2, S_3)\big) = (1,0,2)$.
- $c_\Pi(x_3) = \big(d(x_3, S_1), d(x_3, S_2), d(x_3, S_3)\big) = (0,1,2)$.
- $c_\Pi(x_4) = \big(d(x_4, S_1), d(x_4, S_2), d(x_4, S_3)\big) = (1,0,1)$.
- $c_\Pi(x_5) = \big(d(x_5, S_1), d(x_5, S_2), d(x_5, S_3)\big) = (1,1,0)$.
- $c_\Pi(a_1) = \big(d(a_1, S_1), d(a_1, S_2), d(a_1, S_3)\big) = (1,2,0)$.
- $c_\Pi(a_2) = \big(d(a_2, S_1), d(a_2, S_2), d(a_2, S_3)\big) = (0,1,3)$.
- $c_\Pi(a_3) = \big(d(a_3, S_1), d(a_3, S_2), d(a_3, S_3)\big) = (1,0,3)$.
- $c_\Pi(a_4) = \big(d(a_4, S_1), d(a_4, S_2), d(a_4, S_3)\big) = (2,1,0)$.
- $c_\Pi(a_5) = \big(d(a_5, S_1), d(a_5, S_2), d(a_5, S_3)\big) = (0,2,1)$.

Karena setiap verteks pada $C_5 \odot P_1$ memiliki kode warna yang berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi pada graf $C_5 \odot P_1$. Sehingga, bilangan kromatik lokasi $\chi_L(C_5 \odot P_1) = 3$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\chi_L(C_n \odot P_1) = 4$ untuk $n \geq 6$. Definisikan $c: V(C_n \odot P_1) \to [1,4]$ sebagai berikut:

$$c(x_i) = \begin{cases} 4, \text{ jika } i = 1 \\ 3, \text{ jika } (n \text{ dan } i \text{ ganjil}, i \neq 1) \text{ atau } \left(n \text{ genap}, i \text{ ganjil}, 1 < i \leq 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1\right) \\ 2, \text{ jika } (n \text{ ganjil dan } i \text{ genap}) \text{ atau } \left(n \text{ genap}, i \text{ ganjil dan } i > 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1\right) \text{ atau} \\ \left(n \text{ genap}, i \text{ genap dan } i \leq \frac{n}{2}\right) \\ 1, \text{ jika } n \text{ dan } i \text{ genap dan } i \geq \frac{n}{2} + 1 \end{cases}$$

$$c(a_i) = \begin{cases} 1, \text{jika } (n \text{ ganjil dan semua } i)\ atau\ \left(n \text{ genap dan } i \leq 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1\right) \\ 3, \text{jika } n \text{ genap dan } i > 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1 \end{cases}$$

Pemetaan c adalah pewarnaan lokasi pada $C_n \odot P_1$ untuk $n \geq 6$, apabila $d(u, x_1) = d(v, x_1)$ maka berlaku salah satu dari empat kemungkinan berikut.

(1) $u = a_i, v = x_{i+1}$,
(2) $u = x_i, v = x_{n+1-i}$,
(3) $u = a_i, v = x_{n+1-i}$,
(4) $u = x_i, v = a_{(n+1-i)1}$

Jika salah satu (1) atau (2) berlaku maka titik u dan v berada di kelas warna yang berbeda. Jika (3) berlaku maka $1 = d(v, S_2) < d(u, S_2) = 2$ atau u dan v berada di kelas warna yang berbeda. Jika (4) berlaku maka $1 = d(u, S_2) < d(v, S_2) = 2$ atau u dan v berada di kelas warna yang berbeda. Oleh karena itu, dalam semua kasus di atas kode warna di u dan v adalah berbeda. Sehingga, c adalah pewarnaan lokasi. Jadi diperoleh bahwa $\chi_L(C_n \odot P_1) = 4$ untuk $n \geq 6$.

Simpulan

Pada penelitian ini diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi dari operasi korona pada graf siklus dan graf lintasan adalah jika graf siklus dengan banyak titik dari sama dengan 3 sampai sama dengan 5 serta graf lintasan bertitik 1 maka bernilai 3 dan jika graf siklus dengan banyak titik paling sedikit sama dengan 6 serta graf lintasan bertitik 1 maka bernilai 4. Untuk penelitian selanjutnya, dapat diteliti bilangan kromatik lokasi pada beberapa graf baru seperti operasi amalgamasi sisi dan graf aljabar.

Daftar Pustaka

[1] N. M. Surbakti and F. Ramadhani, "Implementation of the Greedy Algorithm for Coloring graphs based on the Four-Color Theorem", Sudo Jurnal Teknik Informatika, 1(4), pp. 178-182, 2022, https://doi.org/10.56211/sudo.v1i4.157

[2] U. A. Bhatti, H. Tang, G. Wu, S. Marjan, and A. Hussains, "Deep Learning with Graph Convolutional Networks: An Overview and Latest Applications in Computational Intelligence", International Journal of Intelligence Systems, pp. 1-28, 2023, https://doi.org/10.1155/2023/8342104

[3] F. Harary and R.A. Melter, "On the metric dimension of a graph", Ars Combinatoria, 2, pp. 191-195, 1976.

[4] T.A. Kusmayadi, S. Kuntari, D. Rahmadi, and F. A. Lathifah, "On the strong metric dimension of some related wheel graph", Far East Journal Mathematical Sciences, 99(9), pp. 1325-1334, 2016.

[5] D. Rahmadi and Y. Susanti, "The k-metric dimension of double fan graph", Journal of Innovation and Technology in Mathematics and Mathematics Education, 2, pp. 31-35, 2022

[6] D. Rahmadi, "MIXED METRIC DIMENSION OF DOUBLE FAN GRAPH", JD, vol. 6, no. 1, pp. 52-56, Feb. 2024.

[7] G. Chartrand, D. Erwin, M. A. Henning, P.J. Slater, and P. Zhang, "The locating-chromatic number of a graph", Bull. Inst. Combin. Appl., 36, pp. 89-101

[8] Asmiati, H. Assiyatun, and E.T. Baskoro, "Locating-chromatic number of amalgamation of stars", ITB J. Sci., 43A, pp.1-8, 2010.

[9] Asmiati, E.T. Baskoro, H. Assiyatun, D. Suprijanto, R. Simanjuntak, and S. Uttunggadewa, "The locating-chromating number of firecracker graphs", Far East Journal of Mathematical Sciences, 63, pp. 11-23, 2012.

[10] Asmiati, I.K.S.G. Yana, and L. Yulianti, "On the locating chromatic number of certain barbell graphs", Int. J. Math. Math. Sci. 2018 (2018), Article ID 5327504

[11] N. Inayah, W. Aribowo, and M.M.W. Yahya, "The locating chromatic number of book graph", J. Math. 2021 (2021), Article ID 3716361

[12] A. Irawan, Asmiati, L. Zakaria, and K. Muludi, "The locating-chromatic number of origami Graphs", Algorithms 14 (2021), 167.

[13] R. Sakri and M. Abbas, "On locating chromatic number of mobius ladder graphs", Proyecciones 40 (2021), 659–669.

[14] I. W. Sudarsana, F. Susanto, S. Musdalifah, "The locating chromatic number for m-shadow of a connected graph", Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 10(2), pp. 589-601, 2022

[15] N. M. Surbakti, D. Kartika, H. Nasution, and S. Dewi, "The locating number for pizza graphs", Sainmatika: Jurnal Ilmiah Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, 20(2), pp. 126-131, 2023.

[16] H. Assiyatun, D.K. Syofyan, and E.T. Baskoro, "Calculating an upper bound of the locating chromatic number of trees", Theoret. Comput. Sci. 806, pp. 305–309, 2020.

[17] E.T. Baskoro and D.I.D. Primaskun, "Improved algorithm for the locating chromatic number of trees", Theoret. Comput. Sci. 856, 165–168, 2021.

[18] M. Furuya and N. Matsumoto, "Upper bounds on the locating chromatic number of trees", Discrete Appl. Math. 257, 338–341, 2019.

[19] Y. Hafidh and E.T. Baskoro, "On the locating chromatic number of trees", Int. J. Math. Comput. Sci. 17, 377–394, 2022.