Universitas Ahmad Dahlan
Jurnal Ilmiah Matematika
Vol. 9, No. 1, April 2022, pp. 40-48
ISSN 2774-3241
http://journal.uad.ac.id/index.php/Konvergensi

Dimensi metrik dari graf jaring laba-laba

Tuhfatul Janan [a,1,*], Syifaul Janan [b,2]

[a] Sekolah Tinggi Agama Islam Muhammadiyah Probolinggo, Indonesia;
[b] Zenius Education, Indonesia;
[1] tuhfatuljanan4@gmail.com; [2] syifauljanan82@gmail.com
*Correspondent Author

Received: *Revised:* *Accepted:*

KATAKUNCI
Dimensi Metrik
Graf Jaring Laba-Laba

ABSTRAK

Dimensi metrik dari graf terhubung G adalah kardinalitas dari himpunan pembeda minimum dari G, dimana W disebut himpunan pembeda dari G jika $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan dimensi metrik dari graf jaring laba-laba $R_{n,m}$. Graf jaring laba-laba dikonstruksi dari graf bintang S_n sebanyak 1 dan graf sikel C_n sebanyak m. Konstruksi graf tersebut melibatkan definisi dari $C_n(m)$ yang menyatakan graf sikel C_n ke-m, dengan $V\big(C_n(m)\big) = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$ dan $V(S_n) = \{u, a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$ dengan u sebagai titik pusatnya, dimana $m \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Dari hasil penelitian, diperoleh dimensi metrik dari graf jaring laba-laba $R_{m,n}$ adalah 3.

KEYWORDS
Metric Dimension
Spider Web Graph

Metric dimension of spider web graph

The metric dimension of the connected graph G is a cardinality of the minimum distinguishing set of G, where W is called the distinguishing set of G if $r(v|W)$ is different for each $v \in V(G)$. This research aims to determine the metric dimension of spider web graph $R_{n,m}$. The spider web graph is constructed from a star graph S_n and m cycle graph C_n. The graph construction involves the definition of $C_n(m)$ which represents the m^{th} cycle graph C_n, where $V\big(C_n(m)\big) = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$ and $V(S_n) = \{u, a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$ with u as the center point, where $m \in \mathbb{N}$ and $n \geq 3$. Based on the results of this research, the metric dimension of spider web graph $R_{m,n}$ is 3.

Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu anggota dari ilmu eksakta yang memiliki peranan sangat penting bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi [1]. Matematika merupakan ilmu yang dapat melatih kemampuan untuk berpikir secara kritis, logis, kreatif, cermat, dan teliti [2] sehingga dapat menjadi pemecah masalah yang baik [3]. Salah satu cabang dari matematika yang dapat mendukung tercapainya kemampuan tersebut adalah teori graf. Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong dengan elemen-elemennya disebut titik (*vertex*) dan E adalah himpunan dengan elemen-elemennya adalah pasangan tak terurut dua elemen berbeda dari V yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik dari graf G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi dari graf G dinotasikan dengan $E(G)$ [4].

Salah satu topik penelitian dalam teori graf yang telah berkembang adalah dimensi metrik. Topik ini pertama kali diperkenalkan oleh Slater [5] dan secara terpisah oleh Harary dan Melter [6] pada jurnal yang berjudul *on the metric dimension of a graph*. Misalkan G adalah suatu graf terhubung dan u dan v adalah titik-titik dalam G, maka panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G dinotasikan $d(u,v)$. Jika $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah suatu himpunan terurut dari titik-titik dalam graf terhubung G dan titik v di $V(G)$, maka representasi dari titik v terhadap W adalah $r(v|W) = \big(d(v,w_1), (v,w_2), \dots, (v,w_k)\big)$. Jika $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$, maka W disebut himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum dari G disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari G. Kardinalitas dari himpunan pembeda minimum tersebut disebut dengan dimensi metrik dari G, dan dinotasikan dengan $\dim G$ [7].

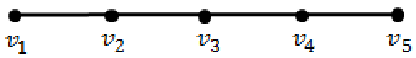
Beberapa penelitian terdahulu mengenai dimensi metrik dari beberapa jenis graf adalah karakterisasi dimensi metrik dari graf lintasan dan pengelompokan nilai dimensi metrik dari graf terhubung [7], dimensi metrik dari graf yang memiliki titik berderajat satu [8], dimensi metrik dari graf lobster $L_n(q;r)$ [9], dimensi metrik dari graf dual antiprisma [10], dimensi metrik dari graf bipartit reguler [11], dimensi metrik pada graf buku ganda [12], dimensi metrik lokal pada graf antiprisma dan graf Sun [13], dimensi metrik dan dimensi partisi dari famili graf tangga [14], dimensi metrik dari beberapa graf yang memuat siklus dan nilai dimensi metriknya konstan [15], dimensi metrik dan *non-isolated resolving number* pada beberapa graf khusus [16], dan dimensi metrik dari graf $W_n + C_n$ untuk $n = 3, 4$ [17]. Berdasarkan penjelasan di atas, penulis tertarik untuk meneliti mengenai dimensi metrik dari graf jaring laba-laba.

Metode

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut :
1. Mengkonstruksi graf jaring laba-laba dari graf bintang dan graf sikel.
2. Menentukan batas bawah dan batas atas dari dimensi metrik graf jaring laba-laba.
3. Menentukan nilai dari dimensi metrik graf jaring laba-laba.

Graf Khusus

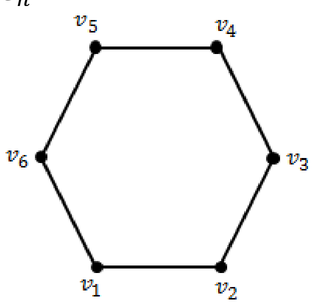
Definisi 1. Graf path adalah graf dengan order $n \geq 1$ dan terdiri atas satu path. Graf path dengan order n dinotasikan dengan P_n.



Gambar 1. Graf Path P_5

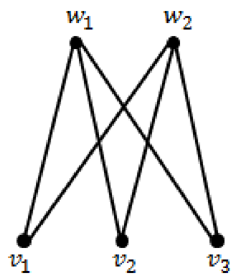
Teorema 2. Graf G merupakan graf path jika dan hanya jika dim = 1 [6].

Definisi 3. Graf sikel adalah graf dengan order $n \geq 3$ dan terdiri atas satu sikel. Graf sikel dengan order n dinotasikan dengan C_n.



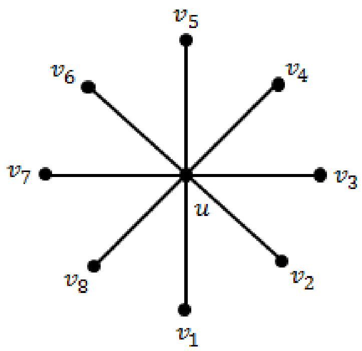
Gambar 2. Graf Sikel C_6

Definisi 4. Graf bipartit lengkap adalah graf dengan setiap titik pada $V_1(G)$ terhubung dengan setiap titik pada $V_2(G)$. Graf bipartit lengkap dengan $|V_1(G)| = m$ dan $|V_2(G)| = n$ dinotasikan dengan $K_{m,n}$.



Gambar 3. Graf Bipartit Lengkap $K_{2,3}$

Definisi 5. Graf bintang adalah graf bipartit lengkap $K_{1,n}$ dan dinotasikan dengan S_n.



Gambar 4. Graf Bintang S_9

Graf Jaring Laba-Laba

Ambil sebarang graf bintang S_n sebanyak 1 dan graf sikel C_n sebanyak m. Misalkan notasi $C_n(m)$ menyatakan graf sikel C_n ke-m, dengan $V\big(C_n(m)\big) = \{a_{m1},\ a_{m2},\ a_{m3},\ \dots\ ,\ a_{mn}\}$ dan $V(S_n) = \{u,\ a_{m1},\ a_{m2},\ a_{m3},\ \dots\ ,\ a_{mn}\}$ dengan u sebagai titik pusatnya, dimana $m \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Selanjutnya, akan dikonstruksi graf jaring laba-laba yang dinotasikan dengan $R_{m,n}$ sebagai berikut :

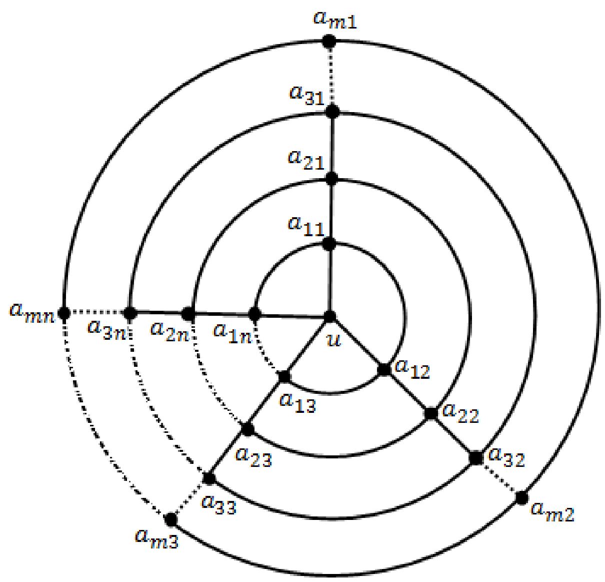
1. Tempatkan graf $C_n(1)$ pada pusat graf S_n sedemikian hingga
   titik a_{11} terletak pada garis ua_{m1},
   titik a_{12} terletak pada garis ua_{m2},
   titik a_{13} terletak pada garis ua_{m3},
   $\vdots$
   titik a_{1n} terletak pada garis ua_{mn}.
2. Tempatkan graf $C_n(2)$ pada pusat graf S_n sedemikian hingga
   titik a_{21} terletak pada garis $a_{11}a_{m1}$,
   titik a_{22} terletak pada garis $a_{12}a_{m2}$,
   titik a_{23} terletak pada garis $a_{13}a_{m3}$,
   $\vdots$
   titik a_{2n} terletak pada garis $a_{1n}a_{mn}$.
3. Tempatkan graf $C_n(3)$ pada pusat graf S_n sedemikian hingga
   titik a_{31} terletak pada garis $a_{21}a_{m1}$,
   titik a_{32} terletak pada garis $a_{22}a_{m2}$,
   titik a_{33} terletak pada garis $a_{23}a_{m3}$,
   $\vdots$
   titik a_{3n} terletak pada garis $a_{2n}a_{mn}$.

⋮

$m-1$. Tempatkan graf $C_n(m-1)$ pada pusat graf S_n sedemikian hingga
titik $a_{(m-1)1}$ terletak pada garis $a_{(m-2)1}a_{m1}$,
titik $a_{(m-1)2}$ terletak pada garis $a_{(m-2)2}a_{m2}$,
titik $a_{(m-1)3}$ terletak pada garis $a_{(m-2)3}a_{m3}$,
⋮
titik $a_{(m-1)n}$ terletak pada garis $a_{(m-2)n}a_{mn}$.

m. Konstruksi graf $C_n(m)$ dengan cara membuat garis $a_{mj}a_{m(j+1)}$, dengan $j \in \{1,2,3, \dots, n\}$ dan $a_{m(n+1)} = a_{m1}$.

Dengan demikian, diperoleh graf jaring laba-laba $R_{m,n}$ seperti pada gambar berikut :



Gambar 5. Graf Jaring Laba-Laba $R_{m,n}$

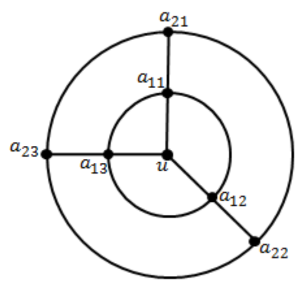
Hasil dan Pembahasan

1. Konjektur dari Graf Jaring Laba-Laba $R_{m,n}$

Misalkan W adalah himpunan terurut dan W^* adalah himpunan pembeda dari graf jaring laba-laba $R_{m,n}$. Perhatikan bahwa graf jaring laba-laba $R_{m,n}$ bukan graf path, maka berdasarkan Teorema 2, diperoleh dim $R_{m,n} > 1$.

1. Untuk $n = 3$

   (i). Untuk $m = 2$



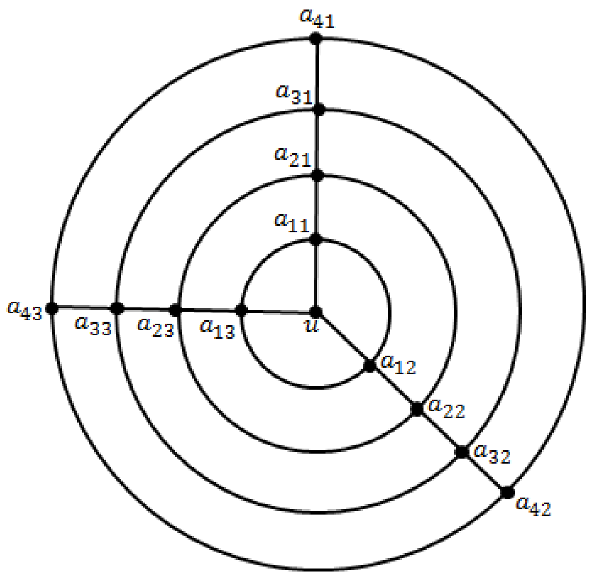
Gambar 6. Graf Jaring Laba-Laba $R_{2,3}$

Pilih $W = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$, sehingga diperoleh

$r(u|W) = (d(u, a_{21}), d(u, a_{22}), d(u, a_{23})) = (2, 2, 2)$
$r(a_{11}|W) = (d(a_{11}, a_{21}), d(a_{11}, a_{22}), d(a_{11}, a_{23})) = (1, 2, 2)$
$r(a_{12}|W) = (d(a_{12}, a_{21}), d(a_{12}, a_{22}), d(a_{12}, a_{23})) = (2, 1, 2)$
$r(a_{13}|W) = (d(a_{13}, a_{21}), d(a_{13}, a_{22}), d(a_{13}, a_{23})) = (2, 2, 1)$
$r(a_{21}|W) = (d(a_{21}, a_{21}), d(a_{21}, a_{22}), d(a_{21}, a_{23})) = (0, 1, 1)$
$r(a_{22}|W) = (d(a_{22}, a_{21}), d(a_{22}, a_{22}), d(a_{22}, a_{23})) = (1, 0, 1)$
$r(a_{23}|W) = (d(a_{23}, a_{21}), d(a_{23}, a_{22}), d(a_{23}, a_{23})) = (1, 1, 0)$

Dengan demikian, $W = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\} = W^*$ merupakan himpunan pembeda. Karena tidak dapat ditemukan W^* yang lain dengan $|W^*| < 3$, maka W^* merupakan basis. Jadi, diperoleh $\dim R_{2,3} = 3$.

(ii). Untuk $m = 4$

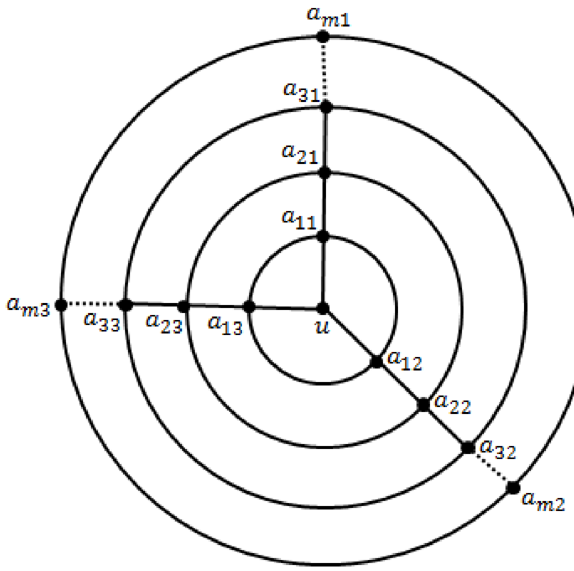


Gambar 7. Graf Jaring Laba-Laba $R_{4,3}$

Pilih $W = \{a_{41}, a_{42}, a_{43}\}$, sehingga diperoleh
$r(u|W) = (d(u, a_{41}), d(u, a_{42}), d(u, a_{43})) = (4, 4, 4)$
$r(a_{11}|W) = (d(a_{11}, a_{41}), d(a_{11}, a_{42}), d(a_{11}, a_{43})) = (3, 4, 4)$
$r(a_{12}|W) = (d(a_{12}, a_{41}), d(a_{12}, a_{42}), d(a_{12}, a_{43})) = (4, 3, 4)$
$r(a_{13}|W) = (d(a_{13}, a_{41}), d(a_{13}, a_{42}), d(a_{13}, a_{43})) = (4, 4, 3)$
$r(a_{21}|W) = (d(a_{21}, a_{41}), d(a_{21}, a_{42}), d(a_{21}, a_{43})) = (2, 3, 3)$
$r(a_{22}|W) = (d(a_{22}, a_{41}), d(a_{22}, a_{42}), d(a_{22}, a_{43})) = (3, 2, 3)$
$r(a_{23}|W) = (d(a_{23}, a_{41}), d(a_{23}, a_{42}), d(a_{23}, a_{43})) = (3, 3, 2)$
$r(a_{31}|W) = (d(a_{31}, a_{41}), d(a_{31}, a_{42}), d(a_{31}, a_{43})) = (1, 2, 2)$
$r(a_{32}|W) = (d(a_{32}, a_{41}), d(a_{32}, a_{42}), d(a_{32}, a_{43})) = (2, 1, 2)$
$r(a_{33}|W) = (d(a_{33}, a_{41}), d(a_{33}, a_{42}), d(a_{33}, a_{43})) = (2, 2, 1)$
$r(a_{41}|W) = (d(a_{41}, a_{41}), d(a_{41}, a_{42}), d(a_{41}, a_{43})) = (0, 1, 1)$
$r(a_{42}|W) = (d(a_{42}, a_{41}), d(a_{42}, a_{42}), d(a_{42}, a_{43})) = (1, 0, 1)$
$r(a_{43}|W) = (d(a_{43}, a_{41}), d(a_{43}, a_{42}), d(a_{43}, a_{43})) = (1, 1, 0)$

Dengan demikian, $W = \{a_{41}, a_{42}, a_{43}\} = W^*$ merupakan himpunan pembeda. Karena tidak dapat ditemukan W^* yang lain dengan $|W^*| < 3$, maka W^* merupakan basis. Jadi, diperoleh $\dim R_{4,3} = 3$.

(iii). Untuk $m \in \mathbb{N}$



Gambar 8. Graf Jaring Laba-Laba $R_{m,3}$

Pilih $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\}$, sehingga diperoleh

$r(u|W) = (d(u, a_{m1}), d(u, a_{m2}), d(u, a_{m3})) = (m, m, m)$

$r(a_{11}|W) = (d(a_{11}, a_{m1}), d(a_{11}, a_{m2}), d(a_{11}, a_{m3})) = (m - 1, m, m)$

$r(a_{12}|W) = (d(a_{12}, a_{m1}), d(a_{12}, a_{m2}), d(a_{12}, a_{m3})) = (m, m - 1, m)$

$\vdots$

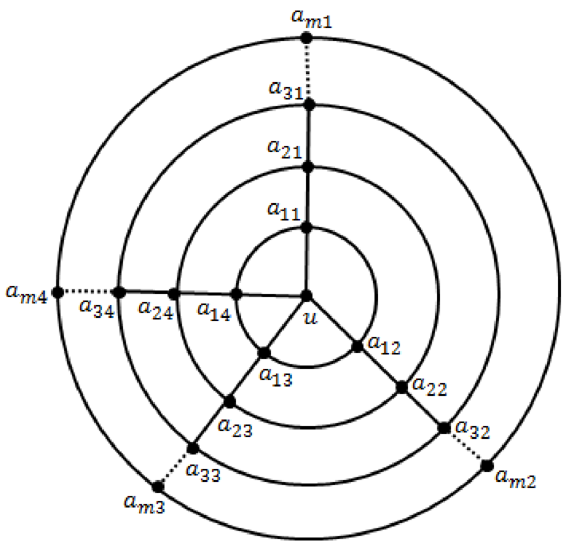
$\vdots$

$r(a_{m2}|W) = (d(a_{m2}, a_{m1}), d(a_{m2}, a_{m2}), d(a_{m2}, a_{m3})) = (1, 0, 1)$

$r(a_{m3}|W) = (d(a_{m3}, a_{m1}), d(a_{m3}, a_{m2}), d(a_{m3}, a_{m3})) = (1, 1, 0)$

Dengan demikian, $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\} = W^*$ merupakan himpunan pembeda. Karena tidak dapat ditemukan W^* yang lain dengan $|W^*| < 3$, maka W^* merupakan basis. Jadi, diperoleh $\dim R_{m,3} = 3$.

2. Untuk $m \in \mathbb{N}$ dan $n = 4$



Gambar 9. Graf Jaring Laba-Laba $R_{m,4}$

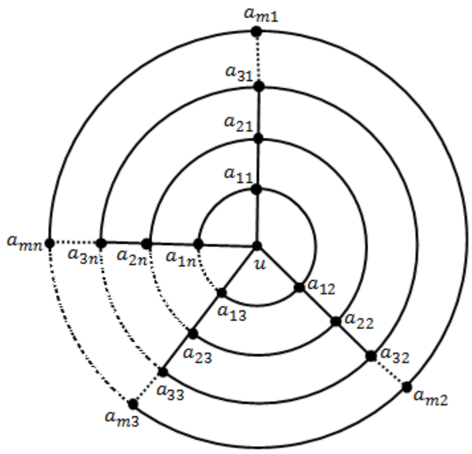
Pilih $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\}$, sehingga diperoleh

$r(u|W) = \big(d(u, a_{m1}), d(u, a_{m2}), d(u, a_{m3})\big) = (m, m, m)$

$$r(a_{11}|W) = \big(d(a_{11}, a_{m1}), d(a_{11}, a_{m2}), d(a_{11}, a_{m3})\big) = (m-1, m, m+1)$$
$$r(a_{12}|W) = \big(d(a_{12}, a_{m1}), d(a_{12}, a_{m2}), d(a_{12}, a_{m3})\big) = (m, m-1, m)$$
$$r(a_{13}|W) = \big(d(a_{13}, a_{m1}), d(a_{13}, a_{m2}), d(a_{13}, a_{m3})\big) = (m+1, m, m-1)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$r(a_{m1}|W) = \big(d(a_{m1}, a_{m1}), d(a_{m1}, a_{m2}), d(a_{m1}, a_{m3})\big) = (0, 1, 2)$$
$$r(a_{m2}|W) = \big(d(a_{m2}, a_{m1}), d(a_{m2}, a_{m2}), d(a_{m2}, a_{m3})\big) = (1, 0, 1)$$
$$r(a_{m3}|W) = \big(d(a_{m3}, a_{m1}), d(a_{m3}, a_{m2}), d(a_{m3}, a_{m3})\big) = (2, 1, 0)$$

Dengan demikian, $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\} = W^*$ merupakan himpunan pembeda. Karena tidak dapat ditemukan W^* yang lain dengan $|W^*| < 3$, maka W^* merupakan basis. Jadi, diperoleh dim $R_{m,4} = 3$.

3. Untuk $m \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$



Gambar 10. Graf Jaring Laba-Laba $R_{m,n}$

Berdasarkan pola di atas, dapat disimpulkan bahwa $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\} = W^*$ merupakan himpunan pembeda. Karena tidak dapat ditemukan W^* yang lain dengan $|W^*| < 3$, maka W^* merupakan basis. Jadi, diperoleh dim $R_{m,n} = 3$.

2. Dimensi Metrik dari Graf Jaring Laba-Laba $R_{m,n}$

Ambil sebarang graf bintang S_n sebanyak 1 dan graf sikel C_n sebanyak m. Misalkan notasi $C_n(m)$ menyatakan graf sikel C_n ke-m, dengan $V\big(C_n(m)\big) = \{a_{m1},\ a_{m2},\ a_{m3},\ \dots\ ,\ a_{mn}\}$ dan $V(S_n) = \{u,\ a_{m1},\ a_{m2},\ a_{m3},\ \dots\ ,\ a_{mn}\}$ dengan u sebagai titik pusatnya, dimana $m \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Misalkan W adalah himpunan terurut dan W^* adalah himpunan pembeda dari graf $R_{m,n}$. Perhatikan bahwa graf $R_{m,n}$ bukan graf path, maka berdasarkan Teorema 2, diperoleh dim $R_{m,n} > 1$.

1. Untuk $|W| = 1$ (tidak memenuhi berdasarkan Teorema 2)
   Bukti :
   (i). Jika W memuat titik u, yaitu $W = \{u\}$
   Perhatikan bahwa $r(a_{11}|W) = (1)$
   $(a_{12}|W) = (1)$
   Karena $r(a_{11}|W) = r(a_{12}|W)$, maka W dengan $|W| = 1$ dan W memuat titik u, bukan himpunan pembeda.
   (ii). Jika W tidak memuat titik u, yaitu $W = \{a_{ij}\big|i \in \{1, 2, 3 \dots, m\}, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\}$
   Perhatikan bahwa $r\big(a_{i(j-1)}\big|W\big) = (1)$

$$r\left(a_{i(j+1)}\middle|W\right) = (1)$$

Karena $r\left(a_{i(j-1)}\middle|W\right) = r\left(a_{i(j+1)}\middle|W\right)$, maka W dengan $|W| = 1$ dan W tidak memuat titik u, bukan himpunan pembeda.

2. Untuk $|W| = 2$

   (i). Jika W memuat titik u, yaitu $W = \left\{u, a_{ij}\middle| i \in \{1,2,3 \dots, m\}, j \in \{1,2,3,\dots,n\}\right\}$

   Perhatikan bahwa $r\left(a_{i(j-1)}\middle|W\right) = (i, 1)$

   $$r\left(a_{i(j+1)}\middle|W\right) = (i, 1)$$

   Karena $r\left(a_{i(j-1)}\middle|W\right) = r\left(a_{i(j+1)}\middle|W\right)$, maka W dengan $|W| = 2$ dan W memuat titik u, bukan himpunan pembeda.

   (ii). Jika W tidak memuat titik u, yaitu $W = \left\{a_{ij}, a_{kl}\middle| i,k \in \{1,2,3 \dots, m\}, j,l \in \{1,2,3,\dots,n\},\ ij \neq kl\right\}$. Dapat ditemukan a_{xy} dan a_{zw} dengan $x,z \in \{1,2,3 \dots, m\}, y,w \in \{1,2,3 \dots, n\}$ dan $xy \neq zw$ sedemikian hingga $r\left(a_{xy}\middle|W\right) = r(a_{zw}|W)$. Sehingga W dengan $|W| = 2$ dan W tidak memuat titik u, bukan himpunan pembeda.

3. Untuk $|W| = 3$, yaitu $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\}$

   Perhatikan bahwa $r(u|W) = \left(d(u, a_{m1}), d(u, a_{m2}), d(u, a_{m3})\right) = (m, m, m)$

$$r(a_{11}|W) = \left(d(a_{11}, a_{m1}), d(a_{11}, a_{m2}), d(a_{11}, a_{m3})\right) = (m-1, m, m+1)$$
$$r(a_{12}|W) = \left(d(a_{12}, a_{m1}), d(a_{12}, a_{m2}), d(a_{12}, a_{m3})\right) = (m, m-1, m)$$
$$r(a_{13}|W) = \left(d(a_{13}, a_{m1}), d(a_{13}, a_{m2}), d(a_{13}, a_{m3})\right) = (m+1, m, m-1)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$r(a_{21}|W) = \left(d(a_{21}, a_{m1}), d(a_{21}, a_{m2}), d(a_{21}, a_{m3})\right) = (m-2, m-1, m)$$
$$r(a_{22}|W) = \left(d(a_{22}, a_{m1}), d(a_{22}, a_{m2}), d(a_{22}, a_{m3})\right) = (m-1, m-2, m-1)$$
$$r(a_{23}|W) = \left(d(a_{23}, a_{m1}), d(a_{23}, a_{m2}), d(a_{23}, a_{m3})\right) = (m, m-1, m-2)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$r(a_{31}|W) = \left(d(a_{31}, a_{m1}), d(a_{31}, a_{m2}), d(a_{31}, a_{m3})\right) = (m-3, m-2, m-1)$$
$$r(a_{32}|W) = \left(d(a_{32}, a_{m1}), d(a_{32}, a_{m2}), d(a_{32}, a_{m3})\right) = (m-2, m-3, m-2)$$
$$r(a_{33}|W) = \left(d(a_{33}, a_{m1}), d(a_{33}, a_{m2}), d(a_{33}, a_{m3})\right) = (m-1, m-2, m-3)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$r(a_{m1}|W) = \left(d(a_{m1}, a_{m1}), d(a_{m1}, a_{m2}), d(a_{m1}, a_{m3})\right) = (0, 1, 2)$$
$$r(a_{m2}|W) = \left(d(a_{m2}, a_{m1}), d(a_{m2}, a_{m2}), d(a_{m2}, a_{m3})\right) = (1, 0, 1)$$
$$r(a_{m3}|W) = \left(d(a_{m3}, a_{m1}), d(a_{m3}, a_{m2}), d(a_{m3}, a_{m3})\right) = (2, 1, 0)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$r\left(a_{m(n-2)}\middle|W\right) = \left(d\left(a_{m(n-2)}, a_{m1}\right), d\left(a_{m(n-2)}, a_{m2}\right), d\left(a_{m(n-2)}, a_{m3}\right)\right) = (3, 4, 5)$$
$$r\left(a_{m(n-1)}\middle|W\right) = \left(d\left(a_{m(n-1)}, a_{m1}\right), d\left(a_{m(n-1)}, a_{m2}\right), d\left(a_{m(n-1)}, a_{m3}\right)\right) = (2, 3, 4)$$
$$r(a_{mn}|W) = \left(d(a_{mn}, a_{m1}), d(a_{mn}, a_{m2}), d(a_{mn}, a_{m3})\right) = (1, 2, 3)$$

Dengan demikian, diperoleh $r(a_{ij}|W) \neq r(a_{kl}|W)$ dengan $i,k \in \{1,2,3 \dots, m\}, j,l \in \{1,2,3 \dots, n\}$ dan $ij \neq kl$. Akibatnya, $W = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\} = W^*$ merupakan himpunan pembeda. Karena tidak dapat ditemukan W^* yang lain dengan $|W^*| < 3$, maka W^* merupakan basis. Jadi, diperoleh $\dim R_{m,n} = 3$.

Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian di atas, diperoleh dimensi metrik dari graf jaring laba-laba $R_{m,n}$ adalah 3.

Daftar Pustaka

[1] S. Sukmawati dan R. Amelia, "Analisis Kesalahan Siswa SMP Dalam Menyelesaikan Soal Materi Segiempat Berdasarkan Teori Nolting," *Jurnal Pembelajaran Matematika Inovatif*, vol. 3, no. 5, pp. 423–432, 2020.

[2] E. Setiawan dan S. Rizki, "Pengembangan Bahan Ajar Barisan dan Deret Matematika Berbasis Multimedia Interaktif," *Aksioma*, vol 7, no. 3, pp. 456–472, 2018.

[3] L, J. Nopriani, A. Panjaitan, E. Surya, and E. Syahputra, "Analysis Mathematical Problem Solving Skills of Student of the Grade VIII-2 Junior High School Bilah Hulu Labuhan Batu," *International Journal of Novel Research in Education and Learning*, vol. 4. no. 2, pp. 131-137, 2017.

[4] J. L. Gross, I. F. Khan, and M. I. Poshni, "Genus Distribution of Graph Amalgamation: Pasing at Root-vertices," *Ars. Combinatoria*, vol. 94, pp. 33-35, 2010.

[5] P. J. Slater, "Leaves and Trees," *Congr. Numer*, vol. 14, pp. 549-559, 1975.

[6] F. Harary and R. A. Melter, "On the Metric Dimension of a Graph," *Ars Combin*, vol. 2, pp. 191 – 195, 1976.

[7] Chartrand, Eroh, Johnson, and Oellerman, "Resolvability in Graph and The Metric Dimension of A Graph," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 105, pp. 99 – 113, 2000.

[8] H. Iswadi, E. T. Baskoro, A. N. M. Salman, and R. Simanjuntak, "The Resolving Graph of Amalgamation of Cycles," *Utilities Mathematica*, vol. 83, pp. 121-132, 2010.

[9] P. G. D. Gumilar, "Dimensi Metrik pada Graf Lobster $\mathrm{L_n(q; r)}$," *E-Jurnal Matematika*, vol. 2, no. 2, pp. 43 – 48, 2013.

[10] F. Fitriani, dan S. Cahyaningtias, "Graf Dual Antiprisma dan Dimensi Metriknya," *E-Jurnal Matematika*, vol. 10, no. 1, pp. 6 – 11, 2021.

[11] M. Baca, E. T. Baskoro, A. N. M. Salman, S. W. Saputro, and D. Suprijanto, "The Metric Dimension of Regular Bipartite Graphs," *Bull. Math. Soc. Math. Roumanie Tome*, no. 1, pp. 15-28, 2011.

[12] N. Ilmayasinta, "Dimensi Metrik pada Graf Buku Ganda," *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika,* vol. 1, no. 1, pp. 21-27, 2019.

[13] S. Khoiriah dan T. A. Kusmayadi, "Dimensi Metrik Lokal pada Graf Antiprisma dan Graf Sun," *Journal of Mathematics and Mathematics Education,* vol. 8, no. 1, pp. 9-15, 2018.

[14] I. Saifudin, "Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Famili Graf Tangga," *JUSTINDO, Jurnal Sistem & Teknologi Informasi Indonesia,* vol. 1, no. 2, pp. 105-112, 2016.

[15] M. Ali, G. Ali, U. Ali, and M. T. Rahim, "On Cycle Related Graphs with Constant Metric Dimension," *Open Journal of Discrete Mathematics*, vol. 2, pp. 21-23, 2012.

[16] W. N. Sholihah, "Dimensi Metrik dan *Non-Isolated Resolving Number* pada Beberapa Graf Khusus," *Jember: Digital Repository Universitas Jember*, 2016.

[17] R. N. Putra, L. Yulianti, dan S. SY, (2018). "Dimensi Metrik dari Graf $\mathrm{W_n + C_n}$ untuk n 3,4," *Jurnal Matematika UNAND,* vol. 7, no. 2, pp. 165 – 169, 2018.