

DIMENSI METRIK GRAF DAN APLIKASINYA PADA PEMASANGAN SENSOR KEBAKARAN

METRIC DIMENSION OF GRAPH AND ITS APPLICATION ON THE INSTALLATION OF FIRE SENSORS

Maria Vianney Any Herawati^a, Maria Meitia Eka Sulistiawati^b

^aProgram Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Kampus III USD Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta, any@usd.ac.id

^bProgram Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Kampus III USD Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta

ABSTRAK

Himpunan pembeda adalah himpunan bagian dari titik-titik pada sebuah graf terhubung yang dapat memberikan koordinat berbeda kepada setiap titik pada graf tersebut. Suatu graf dapat memiliki lebih dari satu himpunan pembeda. Himpunan pembeda dengan jumlah anggota minimum disebut himpunan pembeda minimum, dan kardinalitas dari himpunan pembeda minimum disebut dimensi metrik dari graf tersebut. Salah satu bentuk pengaplikasian dari konsep dimensi metrik pada kehidupan sehari-hari adalah dalam pemasangan sensor kebakaran di sebuah gedung. Pada tulisan ini akan diterapkan konsep dimensi metrik pada pemasangan sensor kebakaran di Gedung Utama Kampus III Universitas Sanata Dharma untuk mendapat jumlah sensor dan letak pemasangan yang optimal.

Kata Kunci : Graf, Dimensi Metrik, Himpunan Pembeda.

ABSTRACT

A resolving set is a subset of points on a connected graph that can provide different coordinates to each point on the graph. A graph can have more than one resolving sets. The resolving set with the minimum number of members is called the minimum resolving set, and the cardinality of the minimum resolving set is called the metric dimension of the graph. One form of applications of the concept of metric dimensions in everyday life is the installation of fire sensors in a building. In this paper, the concept of metric dimensions will be applied to the installation of fire sensors in the Main Building, Campus III of Sanata Dharma University to obtain the optimal number of sensors and installation locations.

Keywords: *Graph, Metric Dimension, Resolving Set.*

Pendahuluan

Teori graf adalah salah satu bagian dalam Matematika Diskret yang cukup banyak diaplikasikan di masa kini. Graf merupakan suatu konsep yang terdiri atas dua bagian utama yaitu titik (*vertex*) dan sisi (*edge*). Sebuah graf G memiliki himpunan tak kosong titik yang dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi yang dinotasikan dengan $E(G)$. Setiap sisi dari suatu graf menghubungkan paling banyak dua titik di antaranya.

Pengaplikasian teori graf dapat kita temui dalam berbagai bidang kehidupan, misalnya pada perancangan jalur transportasi, penyusunan jadwal, optimalisasi jaringan komunikasi, perancangan jaringan elektronik, representasi jaringan pertemanan dalam media sosial, dan lain-lain (Al-Ammori et al., 2019; Cheng et al., 2021; Kadir et al., 2019; Udahemuka et al., 2020; Zheng et al., 2007). Salah satu pengembangan teori graf yang dapat kita temui adalah dimensi metrik yang pertama kali dicetuskan oleh Slater pada tahun 1975 sebelum akhirnya dikembangkan oleh Melter dan Harary pada tahun 1976. Misalkan G adalah sebuah graf terhubung yang memiliki himpunan titik $V(G)$, maka untuk sebarang $u, v \in V(G)$ didefinisikan $d(u, v)$ sebagai jarak antara titik u dan v . Jarak antara titik

u dan v merupakan banyak sisi pada lintasan terpendek yang menghubungkan titik u dan v . Dimensi metrik dapat dicari untuk sebuah graf terhubung. Terlebih dahulu dibentuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\} \subseteq V(G), k \in \mathbb{Z}^+$.

Representasi metrik dari titik $v \in V(G)$ terhadap himpunan W adalah $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), d(v, w_3), \dots, d(v, w_k))$. Himpunan W disebut *himpunan pembeda* (*resolving set*) jika untuk $u, v \in V(G)$, $u \neq v, r(u|W) \neq r(v|W)$. (Chartrand et al., 2000). Himpunan pembeda untuk suatu graf G dengan jumlah anggota minimum disebut himpunan pembeda minimum, dan kardinalitas dari himpunan pembeda minimum disebut dimensi metrik dari G , dinotasikan dengan $\dim(G)$ (Chartrand et al., 2000). Himpunan pembeda kemudian dijadikan sebagai referensi dalam memberikan koordinat atau membedakan semua titik pada graf G . Dimensi metrik adalah banyak anggota minimum dari himpunan pembeda. Terdapat beberapa tulisan sebelumnya yang mengkaji tentang dimensi metrik yaitu:

- Graf G mempunyai dimensi metrik 1 jika dan hanya jika $G = P_n$ (Chartrand et al., 2000).

- Jika G graf lengkap dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $\dim(G) = n - 1$ (Eka & Rahadjeng, 2013).
 - Jika G graf bintang dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $\dim(G) = n - 2$ (Eka & Rahadjeng, 2013).
 - Jika G adalah graf bipartit lengkap dengan n titik dan $n \geq 4$, maka $\dim(G) = n - 2$ (Eka & Rahadjeng, 2013).
 - Jika G adalah graf sapu $B_{n+d,d}$, maka $\dim(g) = d$ (Eka & Rahadjeng, 2013).
 - Jika G adalah graf lingkaran dengan
- P-ISSN: 2088-687X / E-ISSN: 2656-7040
(Eka & Rahadjeng, 2013).

Sedangkan di sini konsep dimensi metrik akan diaplikasikan dalam salah satu permasalahan dunia nyata, salah satunya pada pemasangan sensor kebakaran.

Sensor kebakaran merupakan salah satu bagian penting dalam pembangunan sebuah gedung terlebih gedung bertingkat. Salah satu gedung yang dapat kita teliti mengenai hal tersebut adalah Gedung Utama Kampus III Universitas Sanata Dharma yang terdiri atas enam lantai utama yaitu Basement, Ground, lantai 1, lantai 2, lantai 3, dan lantai 4. Pemasangan sensor kebakaran yang optimal dapat menghemat biaya

pengadaan dan tentunya mengoptimalkan pengawasan terhadap bahaya kebakaran yang mungkin terjadi. Alat sensor kebakaran dirancang untuk mengetahui ruangan mana yang menjadi sumber api, sehingga pencegahan penyebaran api dapat segera dilakukan. Terdapat beberapa pertimbangan yang harus dicermati sebelum memutuskan berapa jumlah sensor kebakaran yang akan dipasang. Sensor kebakaran yang terlalu sedikit dapat menyebabkan kesulitan dalam mendeteksi sumber api, sementara jumlah sensor kebakaran yang terlalu banyak akan memakan biaya yang besar dalam pengadaannya.

1

Metode Penelitian

Dalam bagian ini dijelaskan metode yang akan diterapkan dalam penelitian ini. Metode tersebut meliputi definisi dan notasi terkait topik yang dibahas.

Definisi 1 (Chartrand et al., 2000):

Misalkan u dan v merupakan titik pada graf G . Sebuah *jalan* W dari graf G adalah sebuah barisan hingga selang seling antara titik dan sisi yang diawali oleh titik u dan diakhiri dengan titik v , dinotasikan sebagai $W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{k-1}, e_k, u_k = v$ dengan e_i merupakan sisi yang

menghubungkan u_{i-1} dengan u_i , untuk $i = 1, 2, \dots, k$. Lebih lanjut jalan tersebut juga disebut sebagai *jalan* $u - v$. *Lintasan (path)* $u - v$ adalah sebuah jalan dimana tidak ada pengulangan titik. Banyak sisi yang terdapat pada barisan tersebut disebut *panjang* dari jalan $u - v$.

Definisi 2 (Chartrand et al., 2000):

Untuk sebuah graf terhubung G didefinisikan jarak antara sebarang dua titik u dan v sebagai panjang minimum lintasan $u - v$ dari G yang kemudian dinotasikan sebagai $d(u, v)$.

Definisi 3 (Epp, 2011):

Graf G dikatakan *terhubung* jika dan hanya jika untuk setiap dua titik u dan v pada G terdapat sebuah jalan dari u ke v .

Definisi 4 (Wilson, 2010):

Sebuah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat 2 disebut *graf lingkaran* dan dinotasikan dengan C_n dimana n merupakan banyak titik pada graf tersebut.

Definisi 5 (Wilson, 2010):

Graf yang diperoleh dari C_n dengan cara menghilangkan salah satu sisinya disebut *graf lintasan* dan dinotasikan dengan

P_n dimana n merupakan banyak titik pada graf tersebut. Titik dengan derajat satu biasa disebut titik ujung (titik awal atau titik akhir) pada sebuah lintasan.

Definisi 6 (Wilson, 2010):

Jika himpunan titik pada graf G dapat dipartisi menjadi dua buah himpunan A dan B yang saling lepas atau asing, sehingga tiap-tiap sisi pada graf G bersinggungan dengan satu titik pada A dan satu titik pada B , maka G disebut *graf bipartit*. Titik-titik pada graf lintasan P_n yang memiliki derajat 1 disebut titik-titik ujung.

Definisi 7 (Wilson, 2010):

Sebuah *graf bipartit lengkap* adalah graf bipartit dimana setiap titik pada A terhubung ke setiap titik pada B oleh tepat satu sisi. Graf bipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{r,s}$ dimana r merupakan banyak anggota himpunan A dan s merupakan banyak anggota himpunan B .

Definisi 8 (Chartrand et al., 2000):

Graf bipartit lengkap dengan salah satu himpunan berisi 1 titik atau $K_{1,s}$ dengan $s \geq 3$ disebut *graf bintang*.

Definisi 9 (Morgan et al., 2011):

Graf sapu $B_{n,d}$ adalah graf terhubung dengan n titik yang terdiri atas lintasan P_d dan $(n-d)$ titik lainnya bertetangga dengan hanya salah satu titik ujung dari lintasan P_d .

Hasil dan Pembahasan

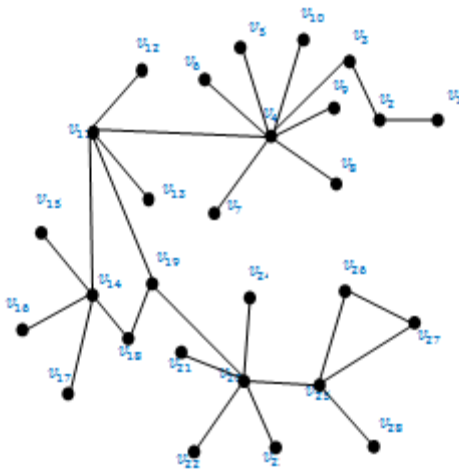
Penerapan dimensi metrik akan dilakukan pada Gedung Utama Kampus III Universitas Sanata Dharma. Setiap ruangan akan dilabeli dengan nomor-nomor pada Tabel 1 untuk mempermudah proses penelusuran.

Berikut digambarkan hubungan antar ruangan pada gedung tersebut. Pada pengaplikasiannya ruangan akan direpresentasikan sebagai titik pada graf, sementara hubungan antar ruang yang dapat berupa jalan tanpa melalui ruangan lain atau lift akan direpresentasikan sebagai *sisi* yang menghubungkan dua titik. Dua ruangan dikatakan berhubungan secara langsung jika di antara kedua ruangan yang direpresentasikan sebagai *titik* terdapat sebuah sisi yang menghubungkan keduanya. Ruangan-ruangan pada setiap lantai Gedung Utama Kampus III Universitas Sanata Dharma di Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta dapat direpresentasikan sebagai sebuah graf.

Tabel 1. Daftar ruangan Gedung Utama Kampus III Universitas Sanata Dharma.

Lantai	Nama Ruangan	Titik
B	Gudang 1	v_1
	Parkiran Basement	v_2
	BLU	v_3
G	Hall Ground	v_4
	Book Store	v_5
	BAA BUK	v_6
	Ruang Doa	v_7
	Gudang 2	v_8
	Bank	v_9
	Kopma	v_{10}
1	Perpustakaan Bawah	v_{11}
	Kantor Kepala Perpustakaan	v_{12}
	Kantor Karyawan Perpustakaan	v_{13}
2	Perpustakaan Atas	v_{14}
	Ruang Baca	v_{15}
	Ruang Work Station	v_{16}
	Ruang Diskusi 1-4	v_{17}
	Ruang Diskusi 5-6	v_{18}
	BSP	v_{19}
3	Hall Lantai 3	v_{20}
	Campus Ministry	v_{21}
	Multimedia	v_{22}
	BAPSI	v_{23}
	Meeting Room 1 dan 2	v_{24}
4	Hall Lantai 4	v_{25}
	Drost	v_{26}
	Ruang Tunggu 1	v_{27}
	Ruang Tunggu 2	v_{28}

Pada penentuan letak dan jumlah sensor kebakaran untuk keseluruhan gedung akan digunakan program melalui perangkat lunak MATLAB. Graf terhubung yang terbentuk dengan memperhatikan hubungan antar ruangan pada lantai yang sama dan antar lantai adalah seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.



Gambar 1. Graf representasi ruang dan hubungan antar ruang Gedung Utama Kampus III Universitas Sanata Dharma

Dari penelusuran menggunakan MATLAB untuk graf G merupakan graf representasi satu bangunan ditemukan bahwa $\dim(G) = 13$ dimana terdapat 912 himpunan pembeda minimum yang terbentuk.

Penentuan himpunan pembeda minimum dari titik-titik pada Gedung Utama Kampus III Universitas Sanata Dharma dapat digunakan sebagai dasar untuk menentukan jumlah minimal sensor kebakaran yang harus dipasang. Dengan memilih salah satu dari

himpunan pembeda minimum, dapat ditentukan ruangan mana saja yang dapat dipasang sensor kebakaran untuk mendeteksi asal adanya api. Representasi metrik setiap titik pada graf terhadap himpunan pembeda minimum merupakan lokasi yang identik untuk suatu ruangan, dengan begitu jika terjadi kebakaran sumber api dapat langsung terdeteksi.

Misalkan pada penentuan letak dan jumlah sensor kebakaran untuk lantai dua kita dapatkan salah satu himpunan pembeda minimum yaitu $W = \{v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$. Untuk $W = \{v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$, didapatkan $r(v_{14} | W) = (1,1,1)$, $r(v_{15} | W) = (0,2,2)$, $r(v_{16} | W) = (2,0,2)$, $r(v_{17} | W) = (2,2,0)$, $r(v_{18} | W) = (2,2,2)$, dan $r(v_{19} | W) = (3,3,3)$.

Jika sensor kebakaran dipasang di titik v_{15} (ruang baca), v_{16} (ruang work station), dan v_{17} (ruang diskusi 1-4) maka ketika terjadi kebakaran di titik v_{18} (ruang diskusi 5-6), sensor kebakaran yang berada pada titik v_{15} akan mendeteksi bahwa api muncul dari ruang yang berjarak dua ruangan dari ruang baca, sensor kebakaran yang berada pada titik v_{16} akan mendeteksi bahwa api muncul dari ruang yang berjarak dua ruangan dari ruang workstation, dan sensor kebakaran yang berada pada titik v_{17} akan

mendeteksi bahwa api muncul dari ruang yang berjarak dua ruangan dari ruang diskusi 1-4. Dari informasi yang diberikan oleh ketiga sensor kebakaran tersebut maka dapat ditemukan bahwa sumber api berasal dari titik v_{18} atau ruang diskusi 5-6.

Hal yang berbeda terjadi ketika hanya dua sensor kebakaran yang dipasang, misalnya $W = \{v_{15}, v_{16}\}$. Untuk $W = \{v_{15}, v_{16}\}$, didapatkan $r(v_{14} | W) = (1,1)$, $r(v_{15} | W) = (0,2)$, $r(v_{16} | W) = (2,0)$, $r(v_{17} | W) = (2,2)$, $r(v_{18} | W) = (2,2)$, dan $r(v_{19} | W) = (3,3)$.

Jika sensor kebakaran dipasang di titik v_{15} (ruang baca) dan v_{16} (ruang work station) maka ketika terjadi kebakaran di titik v_{18} (ruang diskusi 5-6), sensor kebakaran yang berada pada titik v_{15} akan mendeteksi bahwa api muncul dari ruang yang berjarak dua ruangan dari ruang baca dan sensor kebakaran yang berada pada titik v_{16} akan mendeteksi bahwa api muncul dari ruang yang berjarak dua ruangan dari ruang workstation. Terdapat dua ruangan yang berjarak dua dari titik v_{15} dan v_{16} yaitu v_{17} dan v_{18} sehingga sumber kebakaran tidak dapat terdeteksi secara langsung.

Pada penentuan letak dan jumlah sensor kebakaran per lantai diketahui bahwa minimal sensor kebakaran yang dapat

dipasang adalah 14 buah dengan rincian satu buah sensor untuk lantai Ground, lima buah sensor untuk lantai Basement, satu buah sensor untuk lantai satu, tiga buah sensor untuk lantai dua, tiga buah sensor untuk lantai tiga, dan empat buah sensor untuk lantai dua.

Pemasangan sensor pada lantai Basement dapat dilakukan di titik v_1 yaitu gudang 1 dan titik v_3 yaitu BLU (Biro Layanan Umum). Pemasangan sensor pada lantai ground dapat dilakukan di titik-titik pada salah satu himpunan berikut $\{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$, $\{v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}\}$, $\{v_5, v_6, v_7, v_9, v_{10}\}$, $\{v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}\}$, $\{v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$, atau $\{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ dimana v_5 adalah book store, v_6 adalah kantor Biro Administrasi Akademik Bagian Uang Kuliah (BAA BUK), v_7 adalah ruang doa, v_8 adalah gudang 2, v_9 adalah bank, dan v_{10} adalah Kopma. Dengan kata lain, lima sensor kebakaran dapat ditempatkan secara acak pada ruangan di lantai Ground kecuali di Hall Ground.

Pemasangan sensor pada lantai satu dapat dilakukan di titik v_{12} yaitu kantor kepala perpustakaan dan titik v_{13} yaitu kantor karyawan perpustakaan. Pemasangan sensor pada lantai dua dapat dilakukan di titik-titik

pada salah satu himpunan berikut $\{v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$, $\{v_{15}, v_{16}, v_{18}\}$, $\{v_{15}, v_{16}, v_{19}\}$, $\{v_{15}, v_{17}, v_{18}\}$, $\{v_{15}, v_{17}, v_{19}\}$, $\{v_{16}, v_{17}, v_{18}\}$ dan $\{v_{16}, v_{17}, v_{19}\}$ dimana v_{15} adalah ruang baca, v_{16} adalah ruang workstation, v_{17} adalah ruang diskusi 1-4, v_{18} ruang diskusi 5-6, dan v_{19} adalah BSP (Biro Sarana dan Prasarana).

Pemasangan sensor pada lantai tiga dapat dilakukan di titik-titik pada salah satu himpunan berikut $\{v_{21}, v_{22}, v_{23}\}$, $\{v_{21}, v_{22}, v_{24}\}$, $\{v_{21}, v_{23}, v_{24}\}$, dan $\{v_{22}, v_{23}, v_{24}\}$ dimana v_{21} adalah campus ministry, v_{22} adalah multimedia, v_{23} adalah Biro Administrasi Perencanaan dan Sistem Informasi (BAPSI), dan v_{24} adalah meeting room.

Pemasangan sensor pada lantai empat dapat dilakukan di titik-titik pada salah satu himpunan berikut $\{v_{25}, v_{26}\}$, $\{v_{25}, v_{27}\}$, $\{v_{26}, v_{27}\}$, $\{v_{26}, v_{28}\}$, dan $\{v_{27}, v_{28}\}$ dimana v_{25} adalah Hall lantai empat, v_{26} adalah ruang Drost, v_{27} adalah ruang tunggu 1, dan di sini v_{28} adalah ruang tunggu 2.

Berikutnya untuk pemasangan sensor kebakaran dengan memperhitungkan hubungan antar lantai didapatkan hasil dari

komputasi menggunakan MATLAB yaitu himpunan pembeda minimum W memiliki banyak anggota 13. Dimensi metrik yang terbentuk oleh enam graf yang merepresentasikan ruangan dan hubungan antar ruang untuk setiap lantai lebih tinggi dibanding dimensi metrik yang didapat dari satu graf terhubung yang merepresentasikan ruangan, hubungan antarruang dan juga memperhatikan hubungan antar lantai.

Kesimpulan

Dimensi metrik dapat diaplikasikan pada pemasangan sensor kebakaran untuk mengurangi jumlah sensor kebakaran. Dengan menggunakan dimensi metrik, ruangan-ruangan pada gedung dapat diidentifikasi sebagai suatu koordinat. Koordinat-koordinat tersebut dapat membantu mengidentifikasi sumber api sehingga perluasan area kebakaran dapat dicegah. Selain itu pengaplikasian dimensi metrik juga berguna untuk mengurangi jumlah sensor yang dipasang.

Penelusuran letak dan jumlah sensor kebakaran per lantai memberikan hasil yang lebih sedikit dibandingkan untuk satu bangunan. Jumlah sensor kebakaran yang perlu dipasang tanpa memerhatikan hubungan antar lantai hanya sebanyak 14 buah. Sementara sensor kebakaran yang

perlu dipasang dengan memerhatikan hubungan antar lantai sebanyak 13 buah, sehingga pemasangan sensor kebakaran akan lebih optimal jika dilakukan dengan memerhatikan hubungan antar lantai begitu juga untuk menentukan lokasi pemasangannya. Terdapat 912 susunan lokasi yang memungkinkan untuk memasang ke-13 sensor kebakaran.

Ucapan Terima Kasih

Maria Vianney Any Herawati dan Maria Meitia Eka Sulistiawati berterima kasih kepada Universitas Sanata Dharma atas dukungan yang diberikan pada penelitian ini.

Pustaka

- Al-Ammori, A., et al. (2019). Probabilistic-mathematical models for formation of information flows in aircraft fire alarm system. *Journal of Automation and Information Sciences*, 51 (7): 67-80.
- Chartrand, G. et al. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 105 (1-3): 99-113.
- Cheng, J. C. P., et al. (2021). Graph-based network generation and CCTV processing techniques for fire evacuation. *Building Research & Information*, 49 (2): 179-196.
- Eka, S. & Rahadjeng, B. (2013). *Dimensi Metrik Pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartit Komplit*. Skripsi. Surabaya: Jurusan Matematika, Universitas Negeri Surabaya.
- Epp, S. S. (2011). *Discrete Mathematics with Applications* (Fourth Edition). Boston: Brooks/Cole.
- Kadir, E. A., et al. (2019). Multi-sensor system for land and forest fire detection application in Peatland area. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Informatics*, 7 (4): 789-799.
- Morgan, M., et al. (2011). On the eccentric connectivity index of a graph. *Discrete Mathematics*, 311 (13): 1229-1234.
- Udahemuka, G., et al. (2020). Characterization of background temperature dynamics of a multitemporal satellite scene through data assimilation for wildfire detection. *Remote Sensing*, 12 (10): 1661.
- Zheng, Y., et al. (2007). Localization using boundary sensors: An analysis based on graph theory. *ACM Transactions on Sensor Networks*, 3 (4): 21-es.

