PENDUGAAN PARAMETER MODEL *HIDDEN* MARKOV DISKRIT

(*Estimation of Hidden Markov Discrete Model Parameters*)

Musafa
Program Studi Manajemen Pariwisata,STP ARS Internasional-Universitas ARS
Jl. Sekolah Internasional 1-6, musafa.phd@gmail.com

ABSTRAK

Model *Hidden* Markov Diskrit dengan waktu diskrit (Elliott *et al.* 1995) merupakan model pasangan penyebab kejadian dan proses observasi. Model ini mengasumsikan penyebab kejadian sebagai rantai Markov waktu diskrit, yang diamati secara tidak langsung. Proses observasi berskala diskrit dan kejadian yang akan datang dipengaruhi oleh penyebab kejadian saat ini. Parameter model ini adalah matriks probabilitas transisi penyebab kejadian, vektor *c* dan vektor *σ* dari proses observasi; parameter tersebut diduga dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood* dan pendugaan ulang dengan metode *Expectation Maximization* yang melibatkan perubahan ukuran. Kedua metode tersebut menghasilkan algoritma pendugaan parameter model.

Kata Kunci: Rantai Markov, model *Hidden* Markov Diskrit, metode *Maximum Likelihood*, perubahan ukuran, metode *Expectation Maximization*.

ABSTRACT

Discrete Hidden Markov Model with discrete time (Elliott et al. 1995) is a model consists of the cause of event and observation process. This model assumes that the cause of event is a Markov chain in discrete time, observed indirectly. The observation process has discrete range and future observation is influenced by the cause of present event. Parameters of this model are transition probability matrices of the cause of event, vector c and vector σ of observation process; they are estimated by using the maximum likelihood method and re-estimation using the Expectation Maximization method that involves the change of measure. Both of these methods produce a model parameter estimation algorithm.

Keywords: *Markov Chain, Discrete Hidden Markov model, Maximum Likelihood method, change of measure, Expectation Maximization method.*

Pendahuluan

Suatu peristiwa terjadi karena ada hubungan logis dengan penyebabnya. Kedua unsur dalam hubungan ini dipastikan tdak dapat berdiri sendiri, tetapi satu dan yang lain selalu terkait dalam hubungan kausalitas. Jika dalam satu waktu tertentu muncul kejadian A, maka tentu ada penjelasan tentang apa penyebab dan bagaimana proses kejadian A. Bahkan ada kejadian tertentu terjadi secara berulang dan bersifat acak dari satu waktu ke waktu berikutnya.

Suatu himpunan variabel random $X(t), t \in T,$ yang memetakan suatu ruang contoh Ω ke suatu ruang *state* S, t adalah waktu dan $X(t) = x, \forall x \in S$ disebut dengan proses stokastik (Ross 1996). Berdasarkan hal ini, banyak kejadian di sekitar kita, dalam kehidupan sehari-hari, yang dapat dimodelkan dengan suatu proses stokastik. Keberadaan suatu model menjadi penting, karena sering dalam persoalan analisis dan rekomendasi pengambilan keputusan, diperlukan pemodelan masalah dan simulasi model terlebih dahulu untuk menggali sumber dan mendapatkan informasi yang diperlukan, walaupun informasi yang didapatkan dari model berupa taksiran dari persoalan yang sesungguhnya. Bahkan evaluasi terhadap model pun perlu dilakukan untuk mendapatkan informasi yang lebih baik.

Suatu model yang tidak memerlukan pengamatan secara langsung pada penyebab-penyebab kejadiannya dan jika antar penyebab kejadian tersebut membentuk rantai Markov, maka pasangan keduanya akan membentuk model *Hidden* Markov.

Model *Hidden* Markov, termasuk model-model lainnya, mempunyai karakteristik masing-masing, yang dicirikan oleh parameter-parameternya. Matriks peluang transisi penyebab kejadian, nilai harapan, dan ragam dari proses pengamatan.

Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan pendugaan parameter rekursif:
   a. Pendugaan untuk *state*,
   b. Pendugaan untuk banyaknya lompatan,
   c. Pendugaan lamanya rantai Markov berada pada suatu *state*,
   d. Pendugaan proses observasi.
2. Menurunkan algoritma baru dari metode *Maximum Likelihood* dan *Expectation Maximization (EM)* untuk menduga parameter *Hidden* Markov Diskrit Elliott *et al*. (1995).

Metode Penelitian

Penelitian tentang pendugaan parameter model *Hidden* Markov Diskrit Elliott *et.al* (1995) ini merupakan kajian pustaka. Pendugaan parameter model *Hidden* Markov ini menggunakan metode *Maximum Likelihood* dan pendugaan ulang parameter menggunakan metode *Expectation Maximization (EM).*

Hasil dan Pembahasan

Pada bagian akan dibahas definisi model *Hidden* Markov Diskrit Elliott *et. al* (1995) dengan karakteristiknya, pendugaan parameter model, dan penurunan algoritma untuk menduga parameternya.

Model *Hidden* Markov Diskrit Elliott *et al*. (1995)

Semua proses didefinisikan pada ruang peluang $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Misalkan $X = \{X_k; k \in \mathbb{N}\}$ adalah rantai Markov dengan *state* berhingga yang bersifat homogen dan diasumsikan tidak diamati secara langsung, sedangkan $Y = \{Y_k; k \in \mathbb{N}\}$ adalah proses observasinya. Pasangan proses stokastik $\{(X_k, Y_k)\}$ merupakan model *Hidden* Markov.

$\{\mathcal{F}_k\}$ merupakan filtrasi lengkap yang dibangkitkan oleh $\{X_k\}$ dan $\{\mathcal{Y}_k\}$ merupakan filtrasi lengkap yang dibangkitkan oleh $\{Y_k\}$. Karena X merupakan rantai Markov homogen, maka berdasarkan sifat rantai Markov diperoleh

$$P\left(X_{k+1} = e_j \middle| \mathcal{F}_k\right) = P\left(X_{k+1} = e_j \middle| X_0, X_1, \cdots, X_k\right) = P\left(X_{k+1} = e_j \middle| X_k\right).$$

$\{\mathcal{G}_k\}$ merupakan filtrasi lengkap yang dibangkitkan oleh $\{X_k\}$ dan $\{Y_k\}$, maka diperoleh

$$P\left(Y_{k+1} = f_j \middle| \mathcal{G}_k\right) = P\left(Y_{k+1} = f_j \middle| X_0, X_1, \cdots, X_k, Y_0, Y_1, \cdots, Y_k\right) = P\left(Y_{k+1} = f_j \middle| X_k\right)$$

Model *Hidden* Markov Diskrit Elliott *et al.* (1995) yang dibahas adalah

$$X_{k+1} = AX_k + V_{k+1}$$
$$Y_{k+1} = CX_k + W_{k+1},$$

untuk $k \in \mathbb{N}$,

dimana

$X_k \in S_X = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$, $Y_k \in S_Y = \{f_1, f_2, \cdots, f_M\}$,

A dan C merupakan matriks peluang transisi dengan $A = (a_{ji}) = P\left(X_{k+1} = e_j \middle| X_k = e_i\right)$ dan $C = (c_{ji}) = P\left(Y_{k+1} = f_j \middle| X_k = e_i\right)$, yang memenuhi $\sum_{j=1}^{N} a_{ji} = 1,\ a_{ji} \geq 0$, dan $\sum_{j=1}^{M} c_{ji} = 1,\ c_{ji} \geq 0$.

V_k dan W_k memenuhi:

$$E[V_{k+1} | \mathcal{F}_k] = 0, \quad E[W_{k+1} | \mathcal{G}_k] = 0$$
$$\langle V_{k+1} \rangle = E[V_{k+1} V_{k+1}^T | \mathcal{F}_k] = \operatorname{diag}(AX_k) - A \operatorname{diag} X_k A^T$$
$$\langle W_{k+1} \rangle = E[W_{k+1} W_{k+1}^T | \mathcal{G}_k] = \operatorname{diag}(CX_k) - C \operatorname{diag} X_k C^T.$$

Jika $\pi_j = P(X = e_j)$, maka vektor $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)^T$ merupakan nilai harapan dari X, yaitu $\pi = E[X]$ dan untuk X *ergodic* memenuhi $A\pi = \pi$ dan $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$.

Perubahan Ukuran

Perubahan ukuran peluang diperoleh dengan mengubah ukuran peluang asal menjadi peluang baru yang kemudian diinterpretasikan kembali ke dalam peluang asal. Perubahan ukuran ini dibatasi oleh turunan Radon-Nikodym (Billingsley, 1991) Di bawah ukuran P pada $(\Omega, \vee_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_l)$ dan $\vee_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_l$ adalah medan-σ yang dibangkitkan $\mathcal{G}_l$, $\forall l \in \mathbb{N}$ berlaku:

- X merupakan rantai Markov yang homogen dan memenuhi $X_{k+1} = AX_k + V_{k+1}$, dan $E[V_{k+1} | \mathcal{F}_k] = 0$.

- $Y_{k+1} = CX_k + W_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ di mana $E[\,W_{k+1} \mid \mathcal{G}_k] = 0$ dan Y_{k+1} merupakan peubah acak yang bergantung pada X_k.

Akan dikontruksikan suatu peluang baru $\bar{P}$ pada $(\Omega, \vee_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_l)$ yang kontinu absolut terhadap P. Misalkan $\bar{P}$ ukuran peluang baru pada $(\Omega, \vee_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_l)$ yang dibatasi oleh turunan Radon-Nikodym $\frac{d\bar{P}}{dP}\Big|_{\mathcal{G}_k} = \Lambda_k$. Definisikan

$\lambda_l = \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{1}{Mc_l^i}\right)^{Y_l^i}$, dan

$\Lambda_k = \prod_{l=1}^{k} \lambda_l$, di mana $Y_k^i = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = k \\ 0, & \text{untuk } i \neq k \end{cases}$. Jadi λ_k adalah fungsi tak *linear* dari Y_k sehingga dapat ditulis $\lambda_k = \lambda_k(Y_k) = \sum_{i=1}^{M} \frac{Y_k^i}{Mc_k^i}$.

Sehingga di bawah ukuran $\bar{P}$ pada $(\Omega, \vee_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_l)$ akan berlaku:

- X merupakan rantai Markov yang homogen dan memenuhi $X_{k+1} = AX_k + V_{k+1}$, dan $E[V_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] = 0$.
- Y merupakan barisan peubah acak diskret dengan $S_Y = \{f_1, f_2, \cdots, f_M\}$ yang bersifat bebas stokastik identik dan menyebar seragam dengan $\bar{P}(Y_t = f_i) = \frac{1}{M}$, untuk $i = 1, 2, \cdots, M$.
- Y_k dan V_k saling bebas

Akan dikontruksi kembali ukuran peluang P pada $(\Omega, \vee_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_l)$ yang kontinu absolut pada $\bar{P}$ dengan turunan Radon-Nikodym $\frac{d\bar{P}}{dP} = \bar{\Lambda}$ sehingga di bawah P, model di atas dipenuhi yaitu:

- X merupakan rantai Markov homogen yang memenuhi $X_{k+1} = AX_k + V_{k+1}$ dan $E[V_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] = 0$.
- $Y_{k+1} = CX_k + W_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ di mana $E[\,W_{k+1} \mid \mathcal{G}_k] = 0$ dan Y_{k+1} merupakan peubah acak yang bergantung pada X_k.

Akan dikontruksikan suatu peluang baru $\bar{P}$ pada $(\Omega, \vee_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_l)$ yang kontinu absolut terhadap P. Misalkan $\bar{P}$ ukuran peluang baru pada $(\Omega, \vee_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_l)$ yang dibatasi oleh turunan Radon-Nikodym

$\frac{d\bar{P}}{dP}\Big|_{\mathcal{G}_k} = \Lambda_k$. Eksistensi Λ_k dijamin oleh Teorema Radon-Nikodym dan eksistensi $\bar{P}$ dijamin oleh Teorema Perluasan Kolmogorov (Wong *and* Hajek, 1995).

Untuk menentukan P dari $\bar{P}$ didefinisikan $\bar{\lambda}_l$ dan $\bar{\Lambda}_k$ yang merupakan invers dari λ_l dan Λ_k, yaitu $\bar{\lambda}_l = \prod_{i=1}^{M} (M c_l^i)^{Y_l^i}$, $\bar{\Lambda}_k = \prod_{l=1}^{k} \bar{\lambda}_l$, $\bar{\Lambda}_0 = 1$ dan $\frac{dP}{d\bar{P}}\Big|_{\mathcal{G}_k} = \bar{\Lambda}_k$, $l, k \in \mathbb{N}$.

Pendugaan Parameter

Model *Hidden* Markov Diskrit *et. al.* (1995) mempunyai himpunan parameter

$\theta = \left((a_{ji}), 1 \leq i,j \leq N, (c_{ji}), 1 \leq i \leq N,\ \ 1 \leq j \leq M\right)$

Akan ditentukan parameter baru dengan menggunakan algoritma EM.

$\hat{\theta} = \left(\hat{a}_{ji}(k), 1 \leq i,j \leq N, \hat{c}_{ji}(k), 1 \leq i \leq N,\ \ 1 \leq j \leq M\right)$

Perubahan nilai pada parameter tersebut menentukan karakteristik statistiknya.

1. **Maksimum *Likelihood***

   Misalkan $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$adalah himpunan ukuran peluang yang terdefinisi pada $(\Omega, \mathcal{F})$ dan kontinu *absolut* terhadap P_0. Misalkan $\mathcal{Y} \subset \mathcal{F}$, fungsi *Likelihood* yang digunakan untuk menghitung penduga parameter θ berdasarkan informasi $\mathcal{Y}$ adalah

   $$L(\theta) = E_0\left[\frac{dP_\theta}{dP_0} | \mathcal{Y}\right],$$

   dan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) didefinisikan oleh $\hat{\theta} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$.

2. ***Expectation Maximization***
   1. Set nilai awal parameter $\hat{\theta}_k$, dengan $k = 0$.
   2. Set θ^*= $\hat{\theta}_k$ dan hitung $Q(.,\theta^*)$ dengan
      $$Q(\theta,\theta^*)= E_{\theta^*}\left[\log\frac{dP_\theta}{dP_{\theta^*}} | \mathcal{Y}\right].$$
   3. Cari $\hat{\theta}_{k+1} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} Q(\theta,\theta^*)$.
   4. Ganti k dengan k+1 dan ulangi langkah ke 2 sampai langkah ke 4 hingga kriteria pemberhentian tercapai.

Pendugaan Parameter $\hat{a}_{ji}$

Penduga baru untuk parameter $\hat{a}_{sr}(k)$ pada waktu pengamatan k diberikan oleh

$$\hat{a}_{sr}(k) = \frac{\hat{\mathcal{J}}_k^{rs}}{\hat{\mathcal{O}}_k^r} = \frac{\gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs})}{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}, \quad 1 \leq s,r \leq N.$$

Penduga Parameter $\hat{c}_{ji}$

$$\hat{c}_{sr}(k) = \frac{\hat{\mathcal{T}}_k^{rs}}{\hat{\mathcal{O}}_k^r} = \frac{\gamma_k(\mathcal{T}_k^{rs})}{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)},$$

$1 \leq s \leq M,\ 1 \leq r \leq N$.

Menentukan Nilai $\tilde{Y}_{k+1}$

Nilai Penduga terhadap *Y* adalah

$$\tilde{Y}_{k+1} = E[Y_{k+1}|\mathcal{Y}_k] = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ji} q_k(e_i) f_j$$

Algoritma Pendugaan Parameter dan Nilai Harapan Y_{k+1}

Langkah 1: Tetapkan *N* (banyaknya *state* penyebab kejadian), *T* (banyaknya data), dan input data $\{Y_k\}$.

Langkah 2: Tentukan nilai awal

$\pi = (\pi_i)_{N\times 1}$, $A = (a_{ji})_{N\times N}$,

dan $C = (c_{ji})_{M\times N}$, dengan $\pi = E[X_0]$

dan memenuhi $A\pi = \pi$ dan $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$.

Langkah 3: Lakukan untuk $l = 1$ sampai dengan T.

1. Tetapkan nilai awal untuk proses pendugaan

   $a_i = Ae_i$, e_i: vektor unit di $\mathbb{R}^N$,

   $\gamma_0(X_0) = \pi,\ \gamma_0(\mathcal{J}_0^{rs}) = 0,$

   $\gamma_0(\mathcal{O}_0^r) = 0,\ \gamma_0(\mathcal{T}_0) = 0$

2. Lakukan untuk $k = 0$ sampai dengan $l - 1$
   a. Hitung penduga rekursif *smoother*
   $\gamma_{m,k+1}(e_p) = \sum_{j=1}^{N} c_j(Y_{k+1})\langle\gamma_{m,k}(e_p), e_j\rangle\ a_j$
   $\gamma_{m,k+1}(\mathcal{J}_m^{rs}) = \sum_{j=1}^{N} c_j(Y_{k+1})\langle\gamma_{m,k}(\mathcal{J}_m^{rs}), e_j\rangle\ a_j$
   $\gamma_{m,k+1}(\mathcal{O}_m^{r}) = \sum_{j=1}^{N} c_j(Y_{k+1})\langle\gamma_{m,k}(\mathcal{O}_m^{r}), e_j\rangle\ a_j$
   $\gamma_{m,k+1}(\mathcal{T}_m^{rs}) = \sum_{j=1}^{N} c_j(Y_{k+1})\langle\gamma_{m,k}(\mathcal{T}_m^{rs}), e_j\rangle\ a_j$

   dimana $c_j(Y_k) = M \prod_{i=1}^{M} c_{ij}^{Y_k^i}$, $\gamma_{k+1}(H_{k+1}X_{k+1}) := \gamma_{k+1,k+1}(H_{k+1})$
   $\gamma_k(H_k) = \langle\gamma_k(H_kX_k), \underline{1}\rangle$ dengan $\underline{1} = (1,1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^N$.
   b. Hitung penduga parameter $\hat{\hat{a}}_{sr}(k+1)$, $\hat{\hat{c}}_{sr}(k+1)$
   c. Tuliskan $\hat{\hat{A}}_{k+1} = \left(\hat{\hat{a}}_{sr}(k+1)\right)$
   d. Tentukan $\hat{\hat{\pi}}_{k+1}(k+1)$ dari $\hat{\hat{\pi}}_{k+1}(k+1) = \hat{\hat{A}}(k+1)\hat{\hat{\pi}}_{k+1}(k+1)$
   e. Ulangi a sampai dengan d untuk k berikut
3. Berikan $A(k+1) \leftarrow \hat{\hat{A}}_{k+1}$, $C(k+1) \leftarrow \hat{\hat{C}}_{k+1}$, $\pi(k+1) \leftarrow \hat{\hat{\pi}}_{k+1}$
4. Ulangi 1 sampai 3 untuk l berikutnya

Langkah 4:

Hitung nilai $\hat{\hat{Y}}_{k+1} = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i-1}^{M} c_{ji}\, q_k(e_i) f_i$

Langkah 5:

Untuk k=1 sampai dengan T cetak $\hat{\hat{Y}}_k$.

Kesimpulan

Parameter rekursif:
1. Pendugaan untuk *state*,
2. Pendugaan untuk banyaknya lompatan,
3. Pendugaan lamanya rantai Markov berada pada suatu *state*,
4. Pendugaan proses observasi,

dan algoritma baru untuk menduga parameter *Hidden* Markov Diskrit Elliott *et al*. (1995) didapatkan dan diturunkan dari metode *Maximum Likelihood* metode *Expectation Maximization (EM).*

Ucapan Terimakasih

Penulis menyampaikan terima kasih kepada Ibu yang selalu mendoakan hal baik untuk anak-anaknya, istri dan anak-anak, serta keluarga yang selalu mendukung, baik secara moril maupun materiil, dalam penelitian ini. Terimakasih juga disampaikan kepada Dr. Berlian Setiawati, M.S. dan Ir. N. K. Kutha Ardana, M.Sc. yang telah banyak membantu mengarahkan penelitian dalam kajian model dan Nurmaily, teman yang selalu memberikan masukan terkait dengan pembuktian teorema dan lema.

Pustaka

Billingsley P. 1991. *Probability and Measure.* John Willey & Sons. New York.

Elliottt RJ, Aggoun L, Moore JB. 1995. *Hidden Markov Models. Estimation* *and Control*. Springer-Verlag. New York.

Ross, S.M. 1996. *Stochastic Processes*. Ed. ke-2. John Wiley &Sons. New York.

Wong, E and Hajek, B. 1985. *Stochastic Process in Engineering System*. Springer Verlag, Berlin.