KAJIAN MODEL HIDDEN MARKOV KONTINU DAN APLIKASINYA PADA HARGA BERAS

(*The Study of Continuous Hidden Markov Model and Its Application to The Price of Rice*)

Musafa
Program Studi Manajemen Pariwisata, STP ARS Internasional
Jl. Sekolah Internasional 1-6, musafa.mus@bsi.ac.id

ABSTRAK

Model Hidden Markov Kontinu dengan waktu diskrit (Elliot et al. 1995) merupakan model pasangan penyebab kejadian dan proses observasi. Model ini mengasumsikan penyebab kejadian sebagai rantai Markov waktu diskrit, yang diamati secara tidak langsung. Proses observasi berskala kontinu dan kejadian yang akan datang dipengaruhi oleh penyebab kejadian saat ini. Parameter model ini adalah matriks probabilitas transisi penyebab kejadian, vektor c dan vektor σ dari proses observasi; parameter tersebut diduga dengan menggunakan metode Maximum Llikelihood dan algoritma Expectation Maximization yang melibatkan perubahan ukuran. Besarnya parameter model diduga dengan menggunakan pemrograman fungsional, sistem aljabar komputer Mathematica 7.0. Model ini kemudian disimulasikan pada perubahan harga beras dari Februari 2004 hingga Mei 2009. Estimasi parameter digunakan untuk menghitung nilai harapan harga beras. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model Hidden Markov kontinu dapat memodelkan perubahan harga beras.

Kata Kunci: Rantai Markov, model *Hidden* Markov, menggunakan metode *Maximum Llikelihood,* algoritma *Expectation Maximization*

ABSTRACT

Continuous Hidden Markov Model with discrete time (Elliot et al. 1995) is a model consists of the cause of event and observation process. This model assumes that the cause of event is a Markov chain in discrete time, observed indirectly. The observation process has continuous range and future observation is influenced by the cause of present event. Parameters of this model are transition probability matrices of the cause of event, vector c and vector σ of observation process; they are estimated by using the maximum likelihood method and expectation maximization algorithm that involves the change of measure. Model parameters were estimated by using functional programming on Mathematica 7.0 computer algebra systems. The model is then applied to the price change of rice from February 2004 until May 2009. The estimated parameters are used to calculate the expectation value of rice price. As a result, this research convinces that the hidden Markov model can be applied to the price of rice.

Keywords: Markov chains, hidden Markov model, maximum likelihood method, expectation maximization algorithm

Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari banyak kejadian yang dapat dimodelkan dengan proses stokastik. Setiap kejadian berkaitan erat dengan penyebab kejadian tersebut. Jika penyebab kejadian tersebut tidak diamati secara langsung dan membentuk rantai Markov, maka pasangan kejadian dan penyebabnya dapat dimodelkan dengan *Hidden* Markov Model (HMM).

Model *Hidden* Markov Kontinu ini merupakan model *Hidden* Markov merupakan bentuk model *hidden* Markov yang memiliki proses observasi bernilai skalar di suatu selang dan struktur matematika yang komplek.

Kajian dan penerapan model ini dalam bidang manajemen antara lain adalah *business cycle* (Hamilton 1989, Keskinen dan Oller 1998), *stock market* (Hamilton dan Lin 1996, Schaller dan Van Norden 1997, Manton et al. 2008), masalah alokasis asset (Elliot dan Van Der Hoek 1997), penetapan harga opsi (Bollen 1998, Campbell 2002), penetapan harga bond (Landen 2000), kebijakan moneter (Zampolli 2006), nilai penyimpanan gas alam (Chen dan Forsyth 2007), alokasi modal (Morger 2006), harga *electricity spot* (Schindlmayr 2005), analisa pada resiko kredit (Dunbar dan Edwards 2007), manajemen resiko kredit (Banachewicz dan Lucas 2008), dan harga gabah kering (Nurfathoni 2008).

Pada penelitian ini akan ditentukan model *Hidden* Markov kontinu dengan waktu diskret (Elliott *et al*. 1995) terbaik untuk menggambarkan perilaku harga beras.

Karakteristik dari model *Hidden* Markov dicirikan oleh parameter-parameternya, antara lain berupa matriks peluang transisi. Dalam ukuran peluang yang baru, dilakukan pendugaan parameter melalui pendugaan ulang parameter, sehingga diperoleh parameter model dalam bentuk pendugaan rekursif. Pendugaan rekursif ini dapat dievaluasi kembali dengan menggunakan parameter atau data yang baru.

Data input penelitian berupa harga rata-rata beras eceran per minggu jenis Jembar I (kualitas Ramos) dan IR 64 II (kualitas Medium) di tingkat pedagang Ibukota Propinsi Jawa Barat, Kota Bandung. Data ini diambil dari *WEEKLY PRICE SERIES*, *Retail Price of Several Essential Commodities of Provincial City in Indonesia*, Badan Pusat Statistik [BPS], Jakarta-Indonesia, antara bulan Februari tahun 2004 hingga bulan Mei tahun 2009 [21/07/2009]. Jumlah observasi yang digunakan dalam penelitian ini sebanyak 275 data. Sebelum melakukan pendugaan parameter, terlebih dahulu dilakukan perubahan ukuran peluang yang kemudian diinterpretasikan kembali dengan menggunakan peluang asal. Perubahan ukuran peluang ini dibatasi oleh turunan Radon-Nykodim.

Penyelesaian masalah Model *Hidden* Markov ini menggunakan program komputasi yang berbasis pemprograman fungsional . *Software* yang digunakan adalah *Mathematica* 7.0.

Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengkaji model *Hidden* Markov Kontinu dengan waktu diskret (Elliot *et al*., 1995).
2. Mendapatkan pendugaan parameter rekursif:
   a. Pendugaan untuk *state*,
   b. Pendugaan untuk banyaknya lompatan,
   c. Pendugaan lamanya rantai Markov berada pada suatu *state*,
   d. Pendugaan proses observasi.
3. Mengimplementasikan model *Hidden* Markov Kontinu dengan waktu diskret (Elliot *et al*., 1995) untuk masalah perubahan harga beras.

Metode Penelitian

Parameter model *Hidden* Markov ini diduga dengan menggunakan metode *maximum likelihood* dan pendugaan ulang parameter dengan menggunakan *algoritme Expectation Maximization (EM).* Harga paramete model terbaik didapatkan dengan melakukan simulasi data harga beras eceran melalui program komputasi.

Model *Hidden* Markov Kontinu

Semua proses didefinisikan pada ruang peluang $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Misalkan $X = \{X_k; k \in \mathbb{N}\}$ adalah rantai Markov dengan *state* berhingga yang bersifat homogen dan diasumsikan tidak diamati secara langsung, sedangkan $Y = \{Y_k; k \in \mathbb{N}\}$ adalah proses observasinya. Proses observasi Y yang bernilai skalar dan kontinu pada suatu selang, yaitu:

$$Y_{k+1} = c(X_k) + \sigma(X_k)\omega_{k+1.}$$

Pasangan proses stokastik $\{(X_k, Y_k), k \in \mathbb{N}\}$ merupakan model *hidden* Markov.

Model *Hidden* Markov kontinu dengan waktu diskret (Elliott *et al*. 1995) yang dibahas berbentuk:

$$X_{k+1} = AX_k + V_{k+1}$$

$$Y_{k+1} = c(X_k) + \sigma(X_k)\omega_{k+1},$$

di mana ruang *state* dari X adalah $S_X = \{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$ dengan $e_i = (0,..,0,1,0,..,0)^T \in \mathbb{R}^N$, yaitu himpunan vektor satuan e_i di $\mathbb{R}^N$, di mana hanya elemen ke-*i* yang bernilai 1 dan lainnya 0. $A = (a_{ji})_{N\times N}$ adalah matriks peluang transisi yang memenuhi $\sum_{j=1}^{N} a_{ji} = 1$, $a_{ji} \geq 0$, serta $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)^T$ dan $\pi_j = P(X_k = e_j)$ di mana $A\pi = \pi$ dan $\sum_j^N \pi_j = 1$, $\pi_j \geq 0$. dengan $\{\omega_k\}$

adalah barisan peubah acak yang bebas stokastik identik menyebar normal dengan rataan nol dan ragam satu $N(0,1)$. $\omega_k\ dan\ V_k$ bebas stokastik. . dengan $\{\omega_k\}$ adalah barisan peubah acak yang bebas stokastik identik menyebar normal dengan rataan nol dan ragam satu $N(0,1)$. $\omega_k\ dan\ V_k$ bebas stokastik. Misalkan $\{\boldsymbol{\mathcal{F}}_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ adalah filtrasi lengkap yang dibangkitkan oleh X V_k memenuhi $E[V_{k+1}|\boldsymbol{\mathcal{F}}_k] = 0$. Karena $X_k \in S_X$ fungsi c dan σ didefinisikan sebagai vektor $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$dan $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)^T$ di $\mathbb{R}^N$, maka $c(X_k) = \langle c, X_k \rangle$ dan $\sigma(X_k) = \langle \sigma, X_k \rangle$, di mana $\langle\ ,\ \rangle$ merupakan perkalian dalam di $\mathbb{R}^N$ dengan $\sigma_i > 0$, untuk $0 \le i \le N$.

$\{y_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ adalah filtrasi lengkap yang dibangkitkan oleh proses observasi $\{Y_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ sedangkan $\{\mathcal{G}_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ adalah filtrsi lengkap yang dibangkitkan oleh $\{X_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ dan $\{Y_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Diasumsikan bahwa X_0 diberikan, distribusinya, dan rataan $E[X_0]$ diketahui. Karena X merupakan rantai Markov homogen, maka berdasarkan sifat rantai Markov diperoleh $P(X_{k+1} = e_j | \mathcal{F}_k) = P(X_{k+1} = e_j | X_0, X_1, \cdots, X_k) = P(X_{k+1} = e_j | X_k)$dan $A = (a_{ji}) = P(X_{k+1} = e_j | X_k = e_i)$. V_k dan W_k memenuhi: $E[V_{k+1} | \mathcal{F}_k] = 0$, $E[W_{k+1} | \mathcal{G}_k, \omega_{k+1}] = 0$,

$$\langle \boldsymbol{V_{k+1}} \rangle = E[\boldsymbol{V_{k+1}} \boldsymbol{V_{k+1}^T} | \mathcal{F}_k]$$
$$= \operatorname{diag}(AX_k) - A \operatorname{diag} X_k A^T.$$

Perubahan Ukuran

Pendugaan ulang parameter model dengan menggunakan metode EM melibatkan perubahan ukuran. Perubahan ukuran peluang diperoleh dengan mengubah ukuran peluang asal menjadi peluang baru yang kemudian diinterpretasikan kembali ke dalam peluang asal. Perubahan ukuran ini dibatasi oleh turunan Radon-Nikodym (Billingsley, 199).

Di bawah ukuran P pada $(\Omega, \mathcal{F})$ berlaku:

- X merupakan rantai Markov yang homogen dan memenuhi $X_{k+1} = AX_k + V_{k+1}$, dan $E[V_{k+1} | \mathcal{F}_k] = 0$.
- $Y_{k+1} = c(X_k) + \sigma(X_k)\omega_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, di mana $\{\omega_{k+1}\}$ merupakan barisan peubah acak kontinu yang bersifat bebas stokastik identik menyebar normal $\mathrm{N}(0,1)$. Adapun Y_{k+1} merupakan peubah acak yang bergantung pada X_k dengan fungsi kepekatan peluang dari Y_{k+1} adalah
$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i}(t-c_i)^2}.$$

Definisikan ukuran baru $\bar{P}$ dengan batasan turunan Radon-Nikodym $\left.\frac{d\bar{P}}{dP}\right|_{\mathcal{G}_k} = \Lambda_k$. Eksistensi Λ_k dijamin oleh Teorema Radon-Nikodym dan eksistensi $\bar{P}$ dijamin oleh Teorema Perluasan Kolmogorov (Wong dan Hajek, 1995). Akan dikontruksikan ukuran peluang $\bar{P}$ yang kontinu absolut terhadap P dengan turunan Radon-Nikodym $\frac{d\bar{P}}{dP} = \lambda$, sehingga di bawah ukuran peluang $\bar{P}$ akan berlaku:

- X merupakan rantai Markov yang homogen dan memenuhi $X_{k+1} = AX_k + V_{k+1}$, dan $E[V_{k+1} | \mathcal{F}_k] = 0$.
- Y merupakan barisan peubah acak kiontinu yang bebas stokastik identik menyebar normal $\mathrm{N}(0,1)$.

Definsikan ukuran peluang P dari $\bar{P}$ dengan batasan turunan Radon-Nikodym terhadap $\mathcal{G}_k$ $\frac{dP}{d\bar{P}}\Big|_{\mathcal{G}_k} = \bar{\Lambda}_k$. Ukuran peluang P yang dikonstruksi kembali harus memenuhi $\langle \sigma, X_k \rangle \neq 0$.

Pendugaan Rekursif

Untuk melakukan pendugaan parameter baru, maka dibentuk suatu pendugaan rekursif meliputi pendugaan untuk *state*, banyaknya lompatan, lamanya waktu kejadian dan proses observasi.

Lema 1 [Elliott *et al*.1995]

Jika $\{\phi_k\}$ merupakan barisan peubah acak yang dapat diintegralkan dan adapted terhadap $\mathcal{G}$, maka

$$\bar{E}\,[\phi_k \mid \mathcal{Y}_k] = \frac{E[\,\Lambda_k \phi_k \mid \mathcal{Y}_k]}{E[\Lambda_k \mid \mathcal{Y}_k]}.$$

Notasi 2 [Elliott *et al*.1995]

Misalkan $\{\mathcal{Y}_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ adalah filtrasi lengkap yang dibangkitkan oleh $\{Y_k\}$. Jika $\{H_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ merupakan barisan peubah acak bernilai skalar yang terintegralkan, dinotasikan

$$\gamma_k(H_k) \coloneqq \bar{E}[\bar{\Lambda}_k H_k \mid \mathcal{Y}_k].$$

Dengan menggunakan Lema 1 maka $E[H_k \mid \mathcal{Y}_k] = \frac{\bar{E}[\bar{\Lambda}_k H_k \mid \mathcal{Y}_k]}{\bar{E}[\bar{\Lambda}_k \mid \mathcal{Y}_k]} = \frac{\gamma_k(H_k)}{\gamma_k(1)}$,

dengan nilai awal $\gamma_0(X_0) = E[X_0]$, $\bar{\Lambda}_0 = 1$, dan $\underline{1} = (1,1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^N$, Maka $\langle X_k, \underline{1} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle X_k, e_i \rangle = 1$, akibatnya $\langle \gamma_k(H_k X_k), \underline{1} \rangle = \gamma_k(H_k)$.

Notasi 3 [Elliott *et al*.1995]

Jika proses ϕ_k, $k \in \mathbb{N}$ *adapted* terhadap $\mathcal{G}$, dinotasikan

$$\gamma_{m,k}(\phi_m) = \bar{E}[\bar{\Lambda}_k \phi_m X_k \mid \mathcal{Y}_k].$$

Teorema 4 [Elliot *et al*. 1995]

Misalkan proses $\{H_k, k \in \mathbb{N}\}$ yang *adapted* terhadap $\mathcal{G}$ berbentuk

1. H_0 terukur $\mathcal{F}_0$,

2$H_{k+1} = H_k + \alpha_{k+1} + \langle \beta_{k+1}, V_{k+1} \rangle + \delta_{k+1} f(Y_{k+1})$,

$n \geq 1$,di mana $V_{k+1} = X_{k+1} - AX_k$, f fungsi bernilai skalar, dan $\alpha = \{\alpha_k\}, \beta = \{\beta_k\}, \delta = \{\delta_k\}$ adalah proses *predictable* terhadap $\mathcal{G}$, serta α, δ bernilai skalar. Sedangkan β merupakan vektor berdimensi N.

maka

$$\gamma_{k+1,k+1}(H_{k+1}) =$$
$$\sum_{i=1}^{N} \{ \langle \gamma_k(H_k X_k), \Gamma^i(Y_{k+1}) \rangle\, a_i +$$
$$\gamma_k(\alpha_{k+1} \langle X_k, \Gamma^i(Y_{k+1}) \rangle)\, a_i$$
$$+ \gamma_k(\delta_{k+1} \langle X_k, \Gamma^i(Y_{k+1}) \rangle) f(Y_{k+1}) a_i$$
$$+ (\mathrm{diag}(\, a_i) - \, a_i a_i^T)\, \gamma_k(\beta_{k+1} \langle X_k, \Gamma^i(Y_{k+1}) \rangle)\},$$

dimana $a_i = Ae_i$.

Pendugaan Parameter

1. Maksimum *Likelihood*

Misalkan $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$adalah himpunan ukuran peluang yang terdefinisi pada $(\Omega, \mathcal{F})$ dan kontinu *absolut* terhadap P_0. Misalkan

$\mathcal{Y} \subset \mathcal{F}$, fungsi *Likelihood* yang digunakan untuk menghitung penduga parameter θ berdasarkan informasi $\mathcal{Y}$ adalah

$L(\theta) = E_0 \left[\frac{dP_\theta}{dP_0} | \mathcal{Y}\right]$,

dan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) didefinisikan oleh $\hat{\theta} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$.

2. *Expectation Maximization*

Algoritma *Excpectation Maximization* dikembangkan oleh Baum dan Petrie (1996).

Langkah-langkah *Excpectation Maximization* (EM) adalah:

1. Set nilai awal parameter $\hat{\theta}_p$, dengan $k = 0$.
2. Set $\theta^*= \hat{\theta}_p$ dan hitung $Q(.,\theta^*)$ dengan $Q(\theta,\theta^*)= E_{\theta^*}\left[\log \frac{dP_\theta}{dP_{\theta^*}} | \mathcal{Y}\right]$.
3. Cari $\hat{\theta}_{p+1} \epsilon \arg\max_{\theta \epsilon \Theta} Q(\theta,\theta^*)$.
4. Ganti p dengan $p+1 (p \leftarrow p+1)$ dan ulangi langkah ke 2 sampai langkah ke 4 hingga kriteria pemberhentian tercapai.

Parameter yang digunakan pada model di atas adalah $\theta = \{(a_{ji}), 1 \le i,j \le N;\ (c_i), 1 \le i \le N; \sigma_i, 1 \le i \le N\}, \sum_{i=1}^{N} a_{ji} = 1, a_{ji} \ge 0$.Akan ditentukan parameter baru dengan menggunakan algoritma EM

$$\hat{\theta}(k) = \{\hat{a}_{ji}(k), 1 \le i,j \le N; \hat{c}_i(k), 1 \le i \le N;\ \hat{\sigma}_i\ 1 \le i \le N\}, \sum_{i=1}^{N} \hat{a}_{ji} = 1,1, \hat{a}_{ji} \ge 0$$

Pendugaan Parameter $\hat{a}_{ji}$

Penduga baru untuk parameter $\hat{a}_{sr}(k)$ pada waktu pengamatan k diberikan oleh

$\hat{a}_{sr}(k) = \frac{\mathcal{J}_k^{rs}}{\hat{O}_k^r} = \frac{\gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs})}{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)},\quad 1 \le s,r \le N.$

Penduga Parameter $\hat{c}_{ji}$

$\hat{c}_r(k) = \frac{\hat{\mathcal{J}}_k^r(Y)}{\hat{O}_k^r} = \frac{\gamma_k(\mathcal{J}_k^r(Y))}{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}, 1 \le r \le N.$

Pendugaan Parameter $\hat{\sigma}_i(k)$

$$\hat{\sigma}_i(k) = \frac{\gamma_k\left(\mathcal{J}_k^i(Y^2)\right) - 2c_i\gamma_k\left(\mathcal{J}_k^i(Y)\right) - c_i^2\gamma_k\left(\mathcal{O}_k^i\right)}{\gamma_k\left(\mathcal{O}_k^i\right)}, 1 \le i \le N$$

Menentukan Nilai $\tilde{Y}_{k+1}$

Nilai harapan bersyarat Y_{k+1} jika diketahui y_k adalah

$$\tilde{Y}_{k+1} = E[Y_{k+1}|y_k] = \sum_{i=1}^{N} \langle \hat{X}_k, e_i \rangle (c_i).$$

Algoritma Pendugaan Parameter dan Nilai Harapan Y_{k+1}

Algoritma pendugaan parameter model merupakan hasil pengembangan dari algoritma yang dibuat Setiawaty dan Kristina (2005).

Langkah 1: Tetapkan *N* (banyaknya *state* penyebab kejadian), *T* (banyaknya data), dan input data $\{Y_k\}$.

Langkah 2: Tentukan nilai awal $\pi = (\pi_i)_{N\times 1}$, $A = (a_{ji})_{N\times N}$, $c = (c_i)_{N\times 1}$, $\sigma = (\sigma_i)_{N\times 1}$, dengan $\pi = E[X_0]$ dan memenuhi $A\pi = \pi$ dan $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$.

Langkah 3: Lakukan untuk $l = 1$ sampai dengan T.

1. Tetapkan nilai awal untuk proses pendugaan

$a_i = Ae_i$, e_i: vektor unit di $\mathbb{R}^N$, $\gamma_0(X_0) = \pi$, $\gamma_0(\mathcal{J}_0^{rs}) = 0\gamma_0(\mathcal{O}_0^r) = 0$, $\gamma_0({\mathcal{T}_0}^r(Y)) = 0$, $\gamma_0({\mathcal{T}_0}^r(Y^2)) = 0$.

2. Lakukan untuk $m = 0$ sampai dengan k

   a. Hitung penduga rekursif *smoother*

$$\gamma_{m,k+1}(\langle X_m, e_j\rangle) = \sum_{i=1}^N \langle \gamma_{m,k}(\langle X_m, e_j\rangle), \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle\, a_i.$$
$$\gamma_{k+1}(\mathcal{J}_m^{rs}) = \sum_{i=1}^N \langle \gamma_{m,k+1}(\mathcal{J}_m^{rs}), \underline{1}\rangle.$$
$$\gamma_{k+1}(\mathcal{O}_m^r) = \sum_{i=1}^N \langle \gamma_{m,k+1}(\mathcal{O}_m^r), \underline{1}\rangle.$$
$$\gamma_{k+1}(\mathcal{T}_m^r(Y)) = \sum_{i=1}^N \langle \gamma_{m,k+1}(\mathcal{T}_m^r(Y)), \underline{1}\rangle.$$
$$\gamma_{k+1}(\mathcal{T}_m^r(Y^2)) = \sum_{i=1}^N \langle \gamma_{m,k+1}(\mathcal{T}_m^r(Y^2)), \underline{1}\rangle.$$
$$\gamma_{k+1}(H_{k+1}X_{k+1}) \coloneqq \gamma_{k+1,k+1}(H_{k+1}), \gamma_k(H_k) = \langle \gamma_k(H_kX_k), \underline{1}\rangle\ \underline{1} = (1,1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^N.$$

   b. Hitung penduga parameter $\hat{\hat{a}}_{sr}(k+1)$, $\hat{\hat{c}}_r(k+1)$, dan $\hat{\hat{\sigma}}_r(k+1)$.

   c. Tuliskan $\hat{\hat{A}}(k+1) = \left(\hat{\hat{a}}_{sr}(k+1)\right)$, $\hat{\hat{c}}_r(k+1) = \left(\hat{\hat{c}}_r(k+1)\right)$, dan $\hat{\hat{\sigma}}_r(k+1) = (\hat{\hat{\sigma}}_r(k+1))$.

   d. Tentukan $\hat{\hat{\pi}}(k+1)$ dari $\hat{\hat{\pi}}(k+1) = \hat{\hat{A}}(k+1)\hat{\hat{\pi}}(k+1)$

   e. Ulangi a sampai dengan d untuk k berikutnya.

3. Berikan nilai $A \leftarrow \hat{A}(k)$, $c \leftarrow \hat{c}(k)$, $\sigma \leftarrow \hat{\sigma}(k)$.

4. Ulangi 1 sampai 3 untuk l berikutnya.

Langkah 4: Hitung nilai $\hat{\hat{Y}}_{k+1} = \sum_{i=1}^N \hat{\hat{\pi}}_i(k)\hat{\hat{c}}_i(k)$.

Langkah 5: Untuk k = 1 sampai dengan T, cetak $\hat{\hat{Y}}_k$.

Aplikasi Model *Hidden* Markov Kontinu Pada Harga Beras

Beras dapat dikatakan sebagai komoditas pangan utama masyarakat Indonesia, karena sebagian besar ketercukupan pangan masyarakatnya secara dominan masih dipenuhi dari komoditas beras.

Ketersediaan beras merupakan aspek penting dalam pembangunan ketahanan pangan nasional, sehingga ketersediaannya perlu untuk diperhatikan.

Mengingat pentingnya komoditas ini maka kebijakan perberasan nasional menjadi perhatian utama pemerintah .

Secara garis besar permasalahan beras meliputi produksi, distribusi, dan kebijakan perberasan. Permasalahan – permasalahan ini sifatnya berulang dan tidak dapat dipastikan waktunya. Hal ini yang menyebabkan harga rata-rata beras mengalami perubahan yang berfluktuasi.

Model *Hidden* Markov Kontinu dengan waktu diskret (Elliott *et al*. 1995) adalah suatu model matematis yang mempunyai karakteristik yang mendekati sama dengan masalah perubahan harga beras. Model ini dapat melakukan perubahan pada setiap *state*. Oleh karena itu, model ini diharapkan lebih fleksibel dalam menggambarkan perubahan harga rata-rata beras.

Diasumsikan bahwa harga rata-rata beras per minggu dibangkitkan oleh proses pengamatan dan penyebab kejadiannya merupakan rantai Markov yang tidak diamati secara langsung.

Faktor-faktor yang menyebabkan terjadinya perubahan harga rata-rata beras dimisalkan sebagai *state* dari suatu rantai Markov $\{X_k\}$ dan banyaknya faktor tersebut adalah *N*. Pada setiap *state*, data harga rata-rata beras dibangkitkan oleh peubah acak Y_k yang menyebar dengan sebaran tertentu pada ruang peluang $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Misalkan hubungan antara $\{X_k\}$ dan $\{Y_k\}$ ditetapkan oleh persamaan berikut:

$$X_{k+1} = AX_k + V_{k+1}$$
$$Y_{k+1} = c(X_k) + \sigma(X_k)\omega_{k+1}$$

Berdasarkan asumsi bahwa penyebab perubahan harga rata-rata beras tidak diketahui atau tidak diamati, berakibat $\{X_k\}$ tersembunyi (*hidden*) di balik data pengamatan harga rata-rata beras $\{Y_k\}$. Jadi pasangan $\{(X_k, Y_k), k \in \mathbb{N}\}$ merupakan model *Hidden* Markov kontinu dengan waktu diskret (Elliott *et al*. 1995). Parameter model di atas berbentuk

$\theta \coloneqq \left(a_{ji}; 1 \le i, j \le N, c_i; 1 \le i \le N, \sigma_i; 1 \le i \le N\right)$.

Data pengamatan harga rata-rata beras Y_k selama kurun waktu Februari 2004 sampai Mei 2009 berjumlah 275 data. Dengan menggunakan data tersebut, parameter model diduga dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood* dan pendugaan ulang menggunakan metode *Expectation Maximization* yang melibatkan perubahan ukuran. Pendugaan rekursif yang digunakan adalah pendugaan tanpa *smoother* (filter) dan pendugaan *smoother*.

Pada proses pendugaan parameter model, banyaknya penyebab kejadian diambil N = 2,3,4,5,6, sehingga diperoleh model terbaik yang dapat memodelkan perubahan harga beras.

Prediksi harga beras $\{Y_k\}$ dilakukan dengan menggunakan nilai yang diharapkan $\{\tilde{Y}_k\}$ dan $\left\{\tilde{\tilde{Y}}_k\right\}$. Harga beras prediksi ini diharapkan mendekati harga beras pasar. Prosesnya dikerjakan menurut algoritma pendugaan parameter dan nilai harapan Y_{k+1}.

Hasil dan Pembahasan

Keakuratan prediksi harga beras tergantung dari nilai parameter model yang dibangkitkan. Jika nilai parameter model tersebut dapat memaksimukan harapan harga beras prediksi, maka nilai persentase absolut galat semakin kecil. Penduga *smoother* ternyata mampu membangkitkan parameter model dengan nilai MAPE *(Mean Absolute Persentage Error*) yang lebih kecil dibandingkan penduga filter untuk setiap *N*. Jadi, parameter model yang dibangkitkan penduga *smoothe*r lebih baik dari pada penduga filter.

Adanya keterkaitan antara nilai *N*, MAPE, dan R^2 (koefisen determinasi) dengan penduga parameter dijelaskan dalam analisis numerik model berikut.

Tabel 1. Perbandingan absolut persentase galat dan koefisien determinasi model untuk masing masing nilai *N* dari beras IR 64 II

Penduga	N	Min. Absolut Persentase Galat	MAPE	Maks. Absolut Persentase Galat	R^2
Filter	2	0	3.43814	13.61420	0.961214
	3	0	2.10315	10.03260	0.984723
Smoother	2	0	3.18078	13.46090	0.961929
	3	0	1.78370	9.21987	0.990638

Tabel 2. Perbandingan absolut persentase galat dan koefisien determinasi model untuk masing masing nilai N dari beras Jembar I

Penduga	N	Min. Absolut Persentase Galat	MAPE	Maks. Absolut Persentase Galat	R^2
Filter	2	0	3.31982	12.8765	0.961391
	3	0	1.98996	11.5643	0.985293
	4	0	1.56838	11.4580	0.991673
	5	0	1.12120	9.3132	0.995365
	6	0	0.94850	10.4518	0.996630
Smoother	2	0	3.269630	12.63760	0.962605
	3	0	2.031450	9.17913	0.985969
	4	0	1.207520	12.28840	0.995294
	5	0	0.394138	14.24330	0.997931
	6	0	0.445156	12.31500	0.998054

Tabel 1 dan 2 di atas menunjukkan bahwa bertambahnya nilai *N* membuat MAPE semakin kecil nilainya, di mana persentse absolut galat lebih terkonsentrasi pada kisaran 0 % - 6 %, dan nilai R^2 mendekati satu, 0.96 – 1.00, untuk setiap penduga parameter. Hal ini memberikan interpretasi pada model, yaitu jika jumlah penyebab perubahan harga beras IR 64 II dan Jembar I bertambah banyak, maka harga beras prediksi keduanya semakin mendekati harga pasar. Di samping itu, arti nilai R^2 mendekati satu adalah fluktusi harga beras yang terjadi setiap minggu dapat direspon dan dijelaskan oleh model *Hidden* Markov kontinu dengan baik.

Hal lain yang dapat diungkap dari Tabel 1 dan 2, yaitu setiap nilai N bertambah besar maka nilai MAPE atau kisaran nilai persentase absolut galat mengecil. Penduga filter dan *smoother* menghasilkan nilai-nilai galat ini berbeda. Akan tetapi perbedaannya relatif kecil, yaitu 0 % - 1 %. Perbedaan 0 % - 1 % dalam kasus ini tidak terlalu mengakibatkan selisih harga beras prediksi dan pasar berbeda secara signifikan untuk
N = 2, 3, 4, 5, dan 6.

Kesimpulan

Model *Hidden* Markov Kontinu dengan waktu diskret (Elliot et. *al*. 1995) dapat menggambarkan fluktuasi harga beras dengan baik. Hal ini menunjukkan bahwa parameter model ini dengan parameter perubahan harga beras yang sebenarnya mendekati harga yang sama.

Penentuan jenis beras yang mana yang akan dikonsumsi oleh setiap pengguna beras, merupakan sesuatu yang menarik untuk diperhatikan lebih mendalam, juga direspon dengan baik oleh model.

Hasil simulasi model terhadap data-data harga beras, untuk banyaknya penyebab kejadian N = 3 sudah menghasilkan nilai dugaan harga beras yang baik. Semakin banyak jumlah N ditambahkan di dalam simulasi, harga beras prediksi semakin mendekati harga beras pasar. Indikatornya adalah harga MAPE dan R^2.

Ucapan Terimakasih

Penulis menyampaikan terima kasih kepada Ibu yang selalu mendoakan hal baik untuk anak-anaknya, istri dan anak-anak, serta keluarga yang selalu mendukung baik secara moril maupun materiil dalam penelitian ini. Terimakasih juga disampaikan kepada Dr. Berlian Setiawati, M.S. dan Ir. N. K. Kutha Ardana, M.Sc. yang telah banyak membantu mengarahkan penelitian dalam kajian model dan pembuatan program komputasi model.

Pustaka

Banachewicz K, Lucas A. 2008. Quantile Forecasting for Credit Risk Management Using Possibly Misspacified Hidden Markov Model. *Journal of Forecasting.* 27:566-586.

Billingsley P. 1991. *Probability and Measure.* John Willey & Sons. New York.

Bolen NPB. 1998. Valuing Options in Regime-Switching Models. *Journal of Derivatives* 6: 38-49.

[[BPS] Badan Pusat Statistik. *Statistics*-Indonesia. 2009. *WEEKLY PRICE SERIES, Retail Price of Several Essential Commodities of Provincial City in Indonesia*. [21/07/2009].

Campbell SD. 2002. Regime Switching in Economics [*Dissertation*]. University of Pennsylvania.

Casella G, Berger RL. 1990. *Statistical Inference.* Wadsworth &

Brooks/Cole, Pasific Grove. California.

Chen Z, Forsyth PA. 2007. *Implications of a Regime-Switching Model on Natural Gas Stronge Valuation and Optimal Operation.* University of Waterloo Canada.

Dunbar K, Edwards AJ. 2007. Empirical Analysis of Credit Risk Regime Switching and Temporal Conditional Default Correlation in Credit Default Swap Valuation: The Market Liquidity Effect. *Economics Working Papers.* University of Connecticut.

Elliot RJ, Aggoun L, Moore JB. 1995. *Hidden Markov Models. Estimation and Control.* Springer-Verlag. New York.

Hamilton JD. 1989. A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica* 57: 357-384.

Hamilton JD, Lin G. 1996. Stock Market Volatility and the Business Cycle. *Journal of Applied Econometrics* 11: 573-593.

Keskinen L, Oller LE. 1998. A hidden Markov Model as a Dynamic Bayesian Classifier, with an Application to Forecasting Business Cycle Turning Points. *Working Paper. No.* 59. National Institute of Economic Research.

Landen C. 2000. Bond Pricing in a Hidden Markov Model of the Short rate. *Journal Finance and Stochastics.* 4:371-389.

Manton J, Muscatelli A, Krishnamurthy V, Hurn S. 2008. Modelling Stock Market Excess Returns by Markov Modulated Gaussian Noise. *Working Papers. No.* 9806. University of Glasgow.

Morger F. 2006. International Asset Allocation and Hidden Regime-Switching [*Dessertation*]. Universitat Zurich.

Nurfathoni N. 2008. Kajian Model *Hidden* Markov Kontinu dan Aplikasinya pada Harga Gabah Kering Panen. [*Tesis*]. IPB.

Protter P. 1995. *Stochastic Integration Differential Equations.* Springer-Verlag. New York..

Schaller H, Van Norden S. 1997. Regime Switching in Stock Market Returns, Applied Financial Economics. *Taylor and Francis Journals.* 7: 91-177.

Schindlmayr G. 2005. A Regime-Switching Model for Electricity Spot Prices. *Working paper*, EnBW Trading GmbH.

Setiawaty B, Kristina L. 2005. Pendugaan Parameter Model Hidden Markov. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya* 4 : 23-39.

Zampolli F. 2006. Optimal monetary policy in a regime-switching economy: the response to abrupt shifts in exchange rate dynamics. *Working Paper. No.*297. Bank of England.