

Model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas

(Mathematical model of the spread of avian influenza by vaccination and logistical growth in poultry populations)

Frida Anggraeni Setyowati¹, Muhammad Kharis², Tri Sri Noor Asih^{3*}

^{1,2,3}Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Indonesia

Gedung D7 Lt. 1, Kampus Sekaran Gunungpati, Semarang 50229

E-mail: inung.mat@mail.unnes.ac.id

* Corresponding Author

ARTICLE INFO

Kata kunci

Flu Burung
Vaksinasi
Perkembangan Logistik
Keseimbangan
Analisis Stabilitas

Keywords

Avian Influenza
Vaccination
Logistics Growth
Equilibrium
Stability Analysis

ABSTRACT

Flu burung adalah penyakit yang disebabkan oleh virus influenza tipe A. Virus influenza tipe B dan C dapat diisolasi dari manusia dan sifatnya kurang patogen dibandingkan dengan virus influenza tipe A. Dalam penelitian ini populasi manusia dibagi menjadi tiga kelas yaitu kelas manusia rentan $S(t)$, kelas manusia terinfeksi $I(t)$, dan kelas manusia sembuh $R(t)$. Sedangkan populasi unggas dibagi menjadi tiga kelas yaitu kelas unggas rentan $S_b(t)$, kelas unggas terinfeksi $I_b(t)$, dan kelas unggas divaksinasi $V_b(t)$. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh satu titik kesetimbangan bebas penyakit (P_0) dan satu titik kesetimbangan endemik (P_1). Analisis kestabilan juga telah dilakukan diperoleh R_0 kurang dari 1 maka P_0 stabil asimtotik lokal dan R_0 lebih dari 1 maka P_1 stabil asimtotik lokal. Hasil simulasi menunjukkan bahwa proporsi unggas yang divaksinasi dan unggas terinfeksi yang dibakar memperkecil populasi unggas yang terinfeksi flu burung sehingga dapat mencegah terjadinya wabah endemik.

Avian influenza is a disease caused by influenza type A viruses. Influenza viruses types B and C can be isolated from humans and are less pathogenic compared to influenza type A viruses. In this study the human population was divided into three classes, namely vulnerable human classes $S(t)$, infected human classes $I(t)$, and human classes cured $R(t)$. While the poultry population was divided into three classes, namely vulnerable poultry class $S_b(t)$, infected poultry class $I_b(t)$, and vaccinated poultry class $V_b(t)$. Based on the results of the study, there was obtained a disease-free equilibrium point (P_0) and one endemic equilibrium point (P_1). Stability analysis has also been done to obtain R_0 less than 1, then P_0 is stable asymptotic locally and R_0 is more than 1, then P_1 is stable asymptotic locally. Simulation results show that the proportion of vaccinated birds and infected poultry that are burned reduces the population of birds infected with bird flu so that they can prevent the occurrence of endemic outbreaks.

This is an open access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.



PENDAHULUAN

Penyakit merupakan suatu keadaan abnormal dari tubuh atau pikiran yang menyebabkan ketidaknyamanan, disfungsi, atau kesukaran terhadap orang yang dipengaruhinya [1]. Penyakit menular adalah penyakit yang disebabkan oleh kuman berupa virus, bakteri, amuba, atau jamur yang menyerang tubuh manusia, di antaranya influenza, malaria, campak, dan flu burung. Penyakit tidak menular adalah penyakit yang tidak disebabkan oleh kuman, tetapi disebabkan karena adanya problem fisiologis atau metabolisme pada jaringan tubuh manusia, di antaranya batuk, sariawan, dan sakit perut. Penyakit menular dapat menyebabkan wabah pada suatu populasi. Wabah penyakit selama periode waktu yang singkat disebut epidemi. Jika wabah tetap dalam suatu populasi selama jangka waktu yang panjang, maka disebut endemik [2].

Flu burung adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh virus influenza tipe A. Selain tipe A, virus influenza juga memiliki 2 tipe lain yaitu B dan C. Tipe A menyerang unggas dan manusia, tipe B hanya menyerang manusia dan tipe C menyerang babi dan manusia. Tipe A mudah bermutasi dan sangat patogen, sedang tipe B dan C hanya dapat menimbulkan sakit ringan dan tidak menyebabkan epidemik. Flu burung memiliki sifat antara lain mudah mengalami mutasi atau modifikasi genetik, dapat mengaglutinasi sel darah merah, virus mudah mati di luar tubuh (tidak stabil di lingkungan luar), mudah mati oleh beberapa desinfektan, berpotensi menular pada manusia, dan menyebabkan kematian. Flu burung secara natural dapat menginfeksi unggas dan manusia [3].

Flu burung telah menjadi perhatian masyarakat luas karena telah menewaskan banyak korban baik unggas maupun manusia [4]. Laporan dari WHO, pada awal tahun 1918 wabah pandemik virus influenza telah membunuh lebih dari 40.000 orang, di mana subtipe yang mewabah saat itu adalah virus H1N1 yang dikenal "*Spanish Flu*". Tahun 1957 virus bermutasi menjadi H2N2 atau "*Asian Flu*" menyebabkan 100.000 kematian. Tahun 1968 virus bermutasi menjadi H3N2 atau "*Hongkong Flu*" menyebabkan 700.000 kematian. Pada tahun 1997 virus bermutasi lagi menjadi H5N1 atau "*Avian Influenza*" [3].

Hingga 6 Juni 2007, WHO mencatat sebanyak 310 kasus dengan 189 kematian pada manusia yang disebabkan oleh virus ini, termasuk di Indonesia sebanyak 99 kasus dengan 79 kematian. Hal ini dipengaruhi oleh mata pencaharian sebagian penduduk Indonesia sebagai peternak unggas, sehingga Indonesia rawan terhadap penyebaran penyakit flu burung. Selain itu, kurangnya pengetahuan sebagian penduduk Indonesia tentang flu burung ikut pula mempengaruhi laju penyebaran flu burung.

Pada tahun 2015 flu burung pada manusia masih mewabah di dunia. Kasus tersebut dapat ditemukan di Afrika Utara dan Asia Timur. Negara yang paling parah terjangkit adalah China dengan mengalami banyak strain virus yang mewabah dan terus meluas. Informasi yang diterbitkan oleh CNN Indonesia menyatakan bahwa kasus flu burung di dunia masih terjadi, walaupun kemungkinan risiko flu burung menyerang manusia lebih kecil. Kasus flu burung terus terjadi di Asia maupun Eropa, hingga kini flu burung masih menjadi ancaman bagi seluruh dunia.

Dalam upaya pengobatan dan pencegahan penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia, terdapat empat macam obat anti viral, yaitu amantadine, rimantadine, zanamivir, dan oseltamivir atau yang lebih dikenal dengan nama tamiflu. Mekanisme kerja amantadine dan rimantadine adalah menghambat replikasi virus, namun kedua obat ini sudah tidak mempan lagi untuk membunuh virus flu burung yang saat ini beredar luas. Sedangkan mekanisme kerja zanamivir dan oseltamivir dapat menghentikan replikasi virus flu burung [5]. Vaksinasi dapat mengurangi resiko terinfeksi dan menghambat produksi virus pada unggas yang berada disekitar wabah di lingkungan yang kurang bersih [6]. Menurut WHO, pada Desember 2014 beberapa pusat penelitian bahkan universitas di dunia sudah berhasil menemukan vaksin untuk virus flu burung, baik vaksin untuk manusia atau vaksin untuk unggas[7].

Model matematika untuk epidemi merupakan suatu alat yang dapat digunakan untuk mempertimbangkan strategi-strategi dalam mengendalikan penyebaran penyakit. Model matematika juga dapat membantu memprediksi pengendalian epidemi di masa mendatang agar tidak terjadi endemik. Macam-macam model matematika epidemi untuk menganalisis penyebaran penyakit adalah *SEI*, *SEIS*, *SEIR*, *SI*, *SIR*, *SIS*, *SIRS*, [8].

Prinsip biologi memberikan beberapa persyaratan lain P.F. Verhulst pada 1838 merupakan orang pertama yang mengemukakan mengenai batasan dalam model pertumbuhan sebelumnya, dari pada harus mengabaikan karena dapat menyebabkan adanya ambiguitas katatospotik yang ada pada model

Malthus. Persamaan yang diusulkan oleh Verhulst, dinamakan persamaan logistik, yang sampai saat ini persamaan tersebut masih dianggap lebih mendekati realita lapangan. Persamaan ini berdasarkan kehadiran spesies pada lingkungan akan memiliki populasi maksimum [9].

Beberapa peneliti telah melakukan penelitian tentang pemodelan matematika penyebaran flu burung di antaranya [8]. Melakukan analisis model *SIR-SI* dengan mengasumsikan bahwa populasi manusia tidak konstan dan populasi unggas konstan. Sedangkan model yang diteliti memperhatikan kontrol vaksinasi pada populasi manusia dan model *SI-SIIR* yang diteliti mengasumsikan bahwa setiap unggas yang terinfeksi akan mati, tetapi setiap manusia terinfeksi bisa meninggal atau sembuh[7].

Model yang diteliti berbentuk *SIRS* dengan mengasumsikan populasi konstan[10]. Vaksinasi diberikan pada populasi kelas rentan. Model menggunakan metode algoritma Genetika pada pengoptimalan vaksinasi dan *treatment* dengan biaya minimal[11]. Model tersebut mengasumsikan populasi manusia dan populasi unggas tidak konstan. Pada populasi unggas dijelaskan bahwa vaksinasi memiliki tingkat keberhasilan 100% dan populasi manusia yang sembuh memiliki kemungkinan rentan kembali. Sedangkan dalam [4] menentukan analisis dari model penyebaran flu burung pada populasi campuran. Model tersebut mengasumsikan bahwa manusia yang telah terinfeksi belum bermutasi sehingga belum dapat menularkan penyakit pada manusia sehat lainnya. Model *SIRS* pernah diteliti model epideminya tidak memperhatikan adanya perubahan populasi manusia seperti imigrasi atau emigrasi dan model yang dikembangkan memperhatikan pertumbuhan logistik pada populasi manusia[2].

Pada penelitian ini, penulis berusaha melengkapi pemodelan yang telah dikembangkan dengan menambahkan beberapa fakta dan asumsi. Selain itu, peneliti berusaha melengkapi studi kasus menjadi pertumbuhan logistik pada unggas dan membatasi penelitian vaksinasi hanya pada populasi unggas. Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis mengambil judul “MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN FLU BURUNG DENGAN VAKSINASI DAN PERTUMBUHAN LOGISTIK PADA POPULASI UNGGAS”.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui model matematika yang dihasilkan. Penelitian ini juga ditujukan untuk mengetahui efektifitas tindakan pencegahan yang dilakukan pada virus flu burung. Kontribusi penelitian ini antara lain untuk menambah dan memperluas pengetahuan tentang pemodelan matematika khususnya model penyebaran flu burung. Hasil penelitian ini dapat menjadi salah satu acuan dalam menyikapi kasus flu burung yang terjadi.

METODE

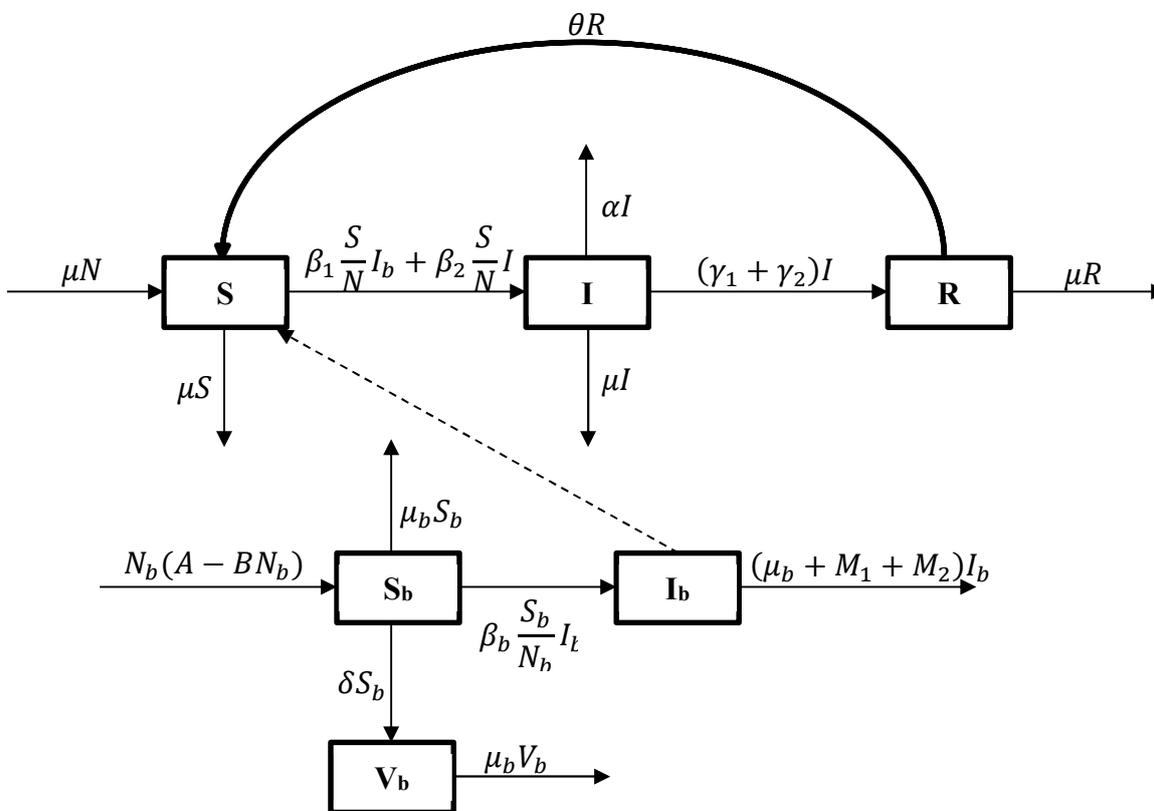
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah melakukan kajian pustaka dari berbagai sumber yang berkaitan dengan permasalahan sehingga didapat suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah. Dari berbagai sumber pustaka yang menjadi bahan kajian, diperoleh suatu pemecahan dari masalah tersebut. Selanjutnya dilakukan langkah-langkah pemecahan masalah sebagai berikut :

1. Membentuk model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas.
2. Menganalisis model matematika yang telah disusun. Hal yang perlu dilakukan sebagai berikut.
 - a. Mencari titik kesetimbangan model.
 - b. Menentukan angka rasio reproduksi (R_0).
 - c. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan sistem tersebut.
3. Membuat simulasi numerik dari solusi model yang dibangun dengan menggunakan *software* Maple 12.
4. Menginterpretasikan solusi model yang didapat.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model yang akan dibahas adalah model matematika epidemi pada penyebaran flu burung dari unggas ke manusia dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik. Model ini mengklasifikasikan populasi manusia menjadi tiga kelompok kelas, yaitu *Susceptible-Infective-Recovery* dan populasi unggas menjadi tiga kelompok kelas, yaitu *Susceptible-Infective-Vaccination*.

Diagram transfer dapat dilihat pada Gambar 1 dan Makna-makna variabel dan parameter dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2.



Gambar 1. Diagram Transfer Penyebaran Flu Burung dengan Vaksinasi dan Pertumbuhan pada Populasi Unggas

Tabel 1. Makna dari Variabel-variabel dalam Model Matematika

Variabel	Makna
$N(t)$	Ukuran populasi manusia pada waktu t
$S(t)$	Ukuran sub populasi manusia rentan terinfeksi pada waktu t
$I(t)$	Ukuran sub populasi manusia terinfeksi pada waktu t
$R(t)$	Ukuran sub populasi manusia sembuh dari penyakit pada waktu t
$N_b(t)$	Ukuran populasi unggas pada waktu t
$S_b(t)$	Ukuran sub populasi unggas rentan terinfeksi pada waktu t
$I_b(t)$	Ukuran sub populasi unggas terinfeksi pada waktu t
$V_b(t)$	Ukuran sub populasi unggas yang divaksinasi pada waktu t

Karena diasumsikan $\beta_2 = 0, \alpha = 0$, dan $\gamma_2 = 0$ maka sistem persamaan differensial dapat dituliskan dalam Sistem (1).

$$\dot{S} = \mu N + \theta R - S\left(\beta_1 \frac{I_b}{N} + \mu\right)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{I} &= \beta_1 \frac{S}{N} I_b - (\mu + \gamma_1) I \\
 \dot{R} &= \gamma_1 I - (\theta + \mu) R \\
 \dot{S}_b &= N_b (A - B N_b) - (\beta_b \frac{I_b}{N_b} + \delta + \mu_b) S_b \\
 \dot{I}_b &= \beta_b \frac{S_b}{N_b} I_b - (\mu_b + M_1 + M_2) I_b \\
 \dot{V}_b &= \delta S_b - \mu_b V_b \\
 S + I + R &= N \\
 S_b + I_b + V_b &= N_b
 \end{aligned} \tag{1}$$

Karena $R = N - (S + I)$ maka Sistem (1) dapat disederhanakan menjadi Sistem (2).

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu K + \theta [K - (S + I)] - S \left(\beta_1 \frac{I_b}{K} + \mu \right) \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta_1 \frac{S}{K} I_b - (\mu + \gamma_1) I \\
 \frac{dN_b}{dt} &= N_b (A - B N_b - \mu_b) - (M_1 + M_2) I_b \\
 \frac{dI_b}{dt} &= \beta_b \frac{N_b - (I_b + V_b)}{N_b} I_b - (\mu_b + M_1 + M_2) I_b \\
 \frac{dV_b}{dt} &= \delta [N_b - (I_b + V_b)] - \mu_b V_b
 \end{aligned} \tag{2}$$

Tabel 2. Makna dari Parameter-parameter dalam Model Matematika

Parameter	Makna
μ	Laju kelahiran yang diasumsikan sama dengan laju kematian alami pada populasi manusia
β_1	Peluang terjadinya kontak antara manusia sehat dengan unggas terinfeksi yang menyebabkan infeksi
β_2	Peluang terjadinya kontak antara manusia sehat dengan manusia terinfeksi yang menyebabkan infeksi (diasumsikan sama dengan nol)
γ_1	Laju kesembuhan manusia terinfeksi secara alami
γ_2	Laju kesembuhan manusia terinfeksi dengan <i>treatment</i> (diasumsikan sama dengan nol)
α	Proporsi manusia yang diberi <i>treatment</i> (diasumsikan sama dengan nol)
θ	Laju penurunan kekebalan
A	Laju pertumbuhan populasi unggas tanpa pengaruh lingkungan
B	Pengaruh dari penambahan kepadatan populasi unggas
μ_b	Laju kematian alami pada populasi unggas
β_b	Peluang terjadinya kontak antara unggas sehat dengan unggas terinfeksi yang menyebabkan infeksi
M_1	Laju kematian unggas akibat terinfeksi flu burung
M_2	Laju kematian unggas akibat dibakar
δ	Proporsi unggas yang divaksinasi

Analisis Model

Titik kesetimbangan diperoleh dengan menjadikan persamaan dari Sistem (2) sama dengan nol. Saat $I_b = 0$ diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu P_0 dan saat $I_b \neq 0$ diperoleh titik kesetimbangan endemik, yaitu P_1 . Eksistensi titik kesetimbangan tersebut selengkapnya diberikan dalam Teorema 1.

Teorema 1

Didefinisikan $R_0 = \frac{\beta_b \mu_b}{(\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}$

1. Jika $R_0 < 1$ dan $A > \mu_b$ maka Sistem (2) mempunyai satu titik kesetimbangan, yaitu $P_0 = (S, I, N_b, I_b, V_b) = \left(K, 0, \frac{A - \mu_b}{B}, 0, \frac{\delta(A - \mu_b)}{B(\delta + \mu_b)} \right)$.
2. Jika $R_0 > 1$ dan $A > \frac{\mu_b(M_1 + M_2)}{(2\delta + \mu_b)} + \mu_b$ maka Sistem (2) mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu P_0 dan $P_1 = (S, I, N_b, I_b, V_b) = (S^*, I^*, N_b^*, I_b^*, V_b^*)$ dengan $S^* = \frac{K(\mu + \gamma_1)I^*}{\beta_1 I_b^*}$,

$$I^* = \frac{\beta_1 K(\mu + \theta)I_b^*}{K(\mu + \theta)(\mu + \gamma_1) + \beta_1 I_b^*(\mu + \gamma_1 + \theta)}$$

$$N_b^* = \frac{\beta_b \mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}{\beta_b(2\delta + \mu_b)I_b^*}$$

$$I_b^* = \frac{\beta_b \mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}{B\beta_b^2(2\delta + \mu_b)^2} [\beta_b((2\delta + \mu_b)(A - \mu_b) - \mu_b(M_1 + M_2)) + (M_1 + M_2)(\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)]$$

$$V_b^* = \frac{\delta[2\beta_b \delta + (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)]I_b^*}{(\delta + \mu_b)[\beta_b \mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)]}$$

Bukti:

Dari Sistem (2) akan dicari titik kesetimbangan dengan membuat nol ruas kanan sehingga diperoleh Sistem (3).

$$\mu K + \theta[K - (S + I)] - S \left(\beta_1 \frac{I_b}{K} + \mu \right) = 0$$

$$\beta_1 \frac{S}{K} I_b - (\mu + \gamma_1)I = 0$$

$$N_b(A - BN_b - \mu_b) - (M_1 + M_2)I_b = 0 \quad (3)$$

$$\beta_b \frac{N_b - (I_b + V_b)}{N_b} I_b - (\mu_b + M_1 + M_2)I_b = 0$$

$$\delta[N_b - (I_b + V_b)] - \mu_b V_b = 0$$

Pertama, mencari nilai I_b maka diperoleh $I_b = 0$ atau $\beta_b(N_b - I_b - V_b) - N_b(\mu_b + M_1 + M_2) = 0$. Berdasarkan nilai I_b , dibagi menjadi dua kasus yakni kasus $I_b = 0$ dan $I_b \neq 0$.

Kasus $I_b = 0$ menghasilkan titik kesetimbangan bebas penyakit (P_0). Sedangkan kasus $I_b \neq 0$ menghasilkan nilai $R_0 = \frac{\beta_b \mu_b}{(\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}$ dan titik kesetimbangan endemik (P_1).

Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Untuk kasus P_0 diperoleh semua nilai eigen negatif apabila $R_0 < 1$. Dengan kata lain, jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan P_0 stabil asimtotik lokal dan jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan P_0 tidak stabil.

Kestabilan titik kesetimbangan tersebut selengkapnya diberikan dalam Teorema 2.

Teorema 2

Didefinisikan $R_0 = \frac{\beta_b \mu_b}{(\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}$ dan $A > \mu_b$.

1. Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium P_0 stabil asimtotik lokal.
2. Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium P_0 tidak stabil.

Bukti:

Untuk kasus P_0 diperoleh persamaan karakteristiknya,

$$\frac{1}{\delta + \mu_b} [(\lambda + \theta + \mu)(\lambda + \mu + \gamma_1)(\lambda + A - \mu_b)(\lambda(\delta + \mu_b) - \beta_b \mu_b + (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b))(\lambda + \delta + \mu_b)] = 0$$

Jelas diperoleh semua nilai eigennya negatif.

Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Kestabilan titik kesetimbangan tersebut selengkapnya diberikan dalam Teorema 3.

Teorema 3

Didefinisikan $R_0 = \frac{\beta_b \mu_b}{(\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}$.

1. Jika $R_0 < 1$ dan $A > \frac{\mu_b(M_1 + M_2)}{(2\delta + \mu_b)} + \mu_b$ maka titik ekuilibrium P_0 stabil asimtotik lokal.
2. Jika $R_0 > 1$, $\delta = \mu_b$, $BI_b > A$, $A > \mu_b$, dan $M_1 + M_2 > 3\mu_b$ maka titik ekuilibrium P_0 tidak stabil dan P_1 stabil asimtotik lokal.

Bukti:

Untuk kasus P_1 diperoleh persamaan karakteristiknya,

$$\frac{1}{K\beta_b(\delta + \mu_b)(2\delta + \mu_b)^2(\beta_b \mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b))} [A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0][B_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_0] = 0$$

Dengan diasumsikan $\delta = \mu_b$ maka diperoleh A_3, A_2, A_1 dan A_0 sebagai berikut.

$$A_3 = 18\beta_b \mu_b^4 (\beta_b - 2(\mu_b + M_1 + M_2)),$$

$$A_2 = 6\beta_b \mu_b^4 [\beta_b(4(BI_b - A) + 14BI_b + A) + 9\mu_b^2(\beta_b - 2(\mu_b + M_1 + M_2)) + 6A(\mu_b + M_1 + M_2)],$$

$$A_1 = 2\beta_b^3 \mu_b^4 [M_1 + M_2 + ((M_1 + M_2) - 3\mu_b)] + 6\beta_b^2 \mu_b^5 [6(BI_b - A) + 6\mu_b + M_1 + M_2] + 24\beta_b \mu_b^4 (\mu_b + M_1 + M_2) [3\mu_b(A - \mu_b) + (M_1 + M_2)^2] + 24\beta_b \mu_b^6 [\beta_b - (\mu_b + M_1 + M_2)] + 8\mu_b^4 (\mu_b + M_1 + M_2)^3 (M_1 + M_2),$$

$$A_0 = 2\mu_b^2 (\beta_b - 2(\mu_b + M_1 + M_2)) [\beta_b^2 \mu_b^3 ((BI_b - A) + 4(A - \mu_b) + \mu_b) + \beta_b \mu_b^3 (\beta_b - 2(\mu_b + M_1 + M_2))(M_1 + M_2) + 2\beta_b \mu_b^3 (\mu_b + M_1 + M_2)(A - \mu_b) + 4\mu_b^3 (\mu_b + M_1 + M_2)^2 (M_1 + M_2)],$$

Dan

$$B_2 = K,$$

$$B_1 = K(2\mu + \gamma_1 + \theta) + \beta_1 I_b,$$

$$B_0 = K(\mu^2 + \mu\gamma_1 + \mu\theta + \gamma_1\theta) + \beta_1 I_b(\mu + \gamma_1 + \theta).$$

Jelas nilai A_3 positif dan karena asumsi $BI_b > A$, $M_1 + M_2 > 3\mu_b$, dan $A > \mu_b$ maka nilai A_2, A_1 , dan A_0 positif. Dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* untuk polinom pangkat tiga diperoleh bahwa $A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0$ mempunyai akar-akar dengan bagian real negatif.

Jelas nilai B_2, B_1 , dan B_0 positif. Dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* untuk polinom pangkat dua diperoleh bahwa $B_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_0 = 0$ mempunyai akar-akar dengan bagian real negatif.

Simulasi Model

Simulasi model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas menggunakan program Maple 12 dan dengan memberikan nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi nilai R_0 dalam teorema-teorema yang telah diberikan di atas. Nilai parameter-parameter yang diberikan untuk membuat simulasi dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3 Nilai Parameter-parameter pada Sistem (2)

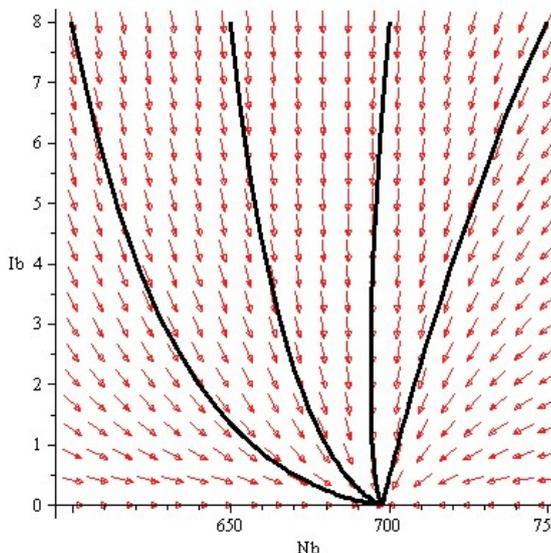
Parameter	Nilai
μ	0.00004
β_1	0.01667
γ_1	0.001
θ	0.023
A	0.075
B	0.0001
μ_b	0.0052
β_b	$0 < \beta_b < 1$
M_1	0.03
M_2	0.1
δ	0.05
K	2000

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi titik kesetimbangan P_0 sesuai dengan Tabel 3, nilai $\delta = 0.05$ artinya proporsi unggas yang diberikan vaksinasi 5% dari unggas yang terinfeksi.

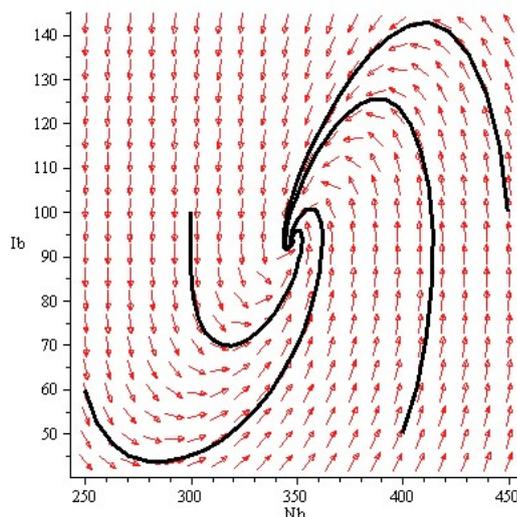
Dari nilai-nilai parameter tersebut diperoleh $R_0 = 0.31354515 < 1, A > \mu_b$ dan titik kesetimbangan $P_0 = (S, I, N_b, I_b, V_b) = (2000, 0, 698, 0, 632.3)$. Hasil simulasi titik kesetimbangan bebas penyakit P_0 menggunakan Maple 12 dapat dilihat pada Gambar 2.

Sedangkan nilai parameter yang digunakan dalam simulasi titik kesetimbangan P_1 sesuai dengan Tabel 3, nilai $\delta = 0.0052$ artinya proporsi unggas yang diberikan vaksinasi 0,52% dari unggas yang terinfeksi.

Dari nilai-nilai parameter tersebut diperoleh $R_0 = 2.3668639 > 1, \delta = \mu_b, BI_b^* > A, A > \mu_b, M_1 + M_2 > 3\mu_b$ dan titik kesetimbangan $P_1 = (S^*, I^*, N_b^*, I_b^*, V_b^*) = (1162.3, 802.9, 447.75, 86.2, 180.8)$. Hasil simulasi titik kesetimbangan endemik P_1 menggunakan Maple 12 dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 2 Grafik bidang N_b vs I_b



Gambar 3 Grafik bidang N_b vs I_b

Upaya pencegahan terjadinya wabah endemik adalah dengan pemberian vaksinasi pada unggas rentan dan pembakaran pada unggas terinfeksi. Analisis dilakukan dengan cara membuat variasi laju vaksinasi unggas rentan (δ) dan variasi pembakaran unggas terinfeksi (M_2). Proporsi minimum unggas rentan yang divaksinasi dan unggas terinfeksi yang dibakar agar epidemi tidak meluas digunakan syarat $R_0 < 1$.

Proporsi Minimum Unggas yang Divaksinasi

Dengan menggunakan $\beta_b = 0.64$, $M_2 = 0.1$, dan nilai parameter yang sesuai dengan Tabel 3 serta dengan variasi nilai δ yaitu 0.025, 0.03, 0.046, dan 0.089. Hasil simulasi titik kesetimbangan endemik P_1 menggunakan Maple 12 dapat dilihat pada Gambar 4 s.d. Gambar 6.

Perbedaan banyak populasi kelas N_b , I_b , dan V_b terhadap waktu t dengan $\beta_b = 0.64$ dan $\delta = 0.025, 0.030, 0.046, 0.089$ dapat dilihat pada Gambar 10 s.d Gambar 13.

Proporsi Minimum Unggas Terinfeksi yang Dibakar

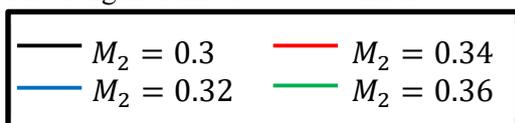
Dengan menggunakan $\beta_b = 0.64$, $\delta = 0.0052$, dan nilai parameter yang sesuai dengan Tabel 4.3 serta dengan variasi nilai M_2 yaitu 0.3, 0.32, 0.34, dan 0.36. Hasil simulasi titik kesetimbangan endemik P_1 menggunakan Maple 12 dapat dilihat pada Gambar 7 s.d. Gambar 9.

Perbedaan banyak populasi kelas N_b , I_b , dan V_b terhadap waktu t dengan $\beta_b = 0.64$ dan $M_2 = 0.3, 0.32, 0.34, 0.36$ dapat dilihat pada Gambar 14 s.d. Gambar 17.

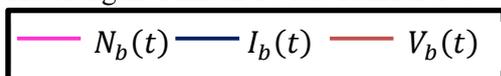
Keterangan Gambar 4 s.d. Gambar 6:

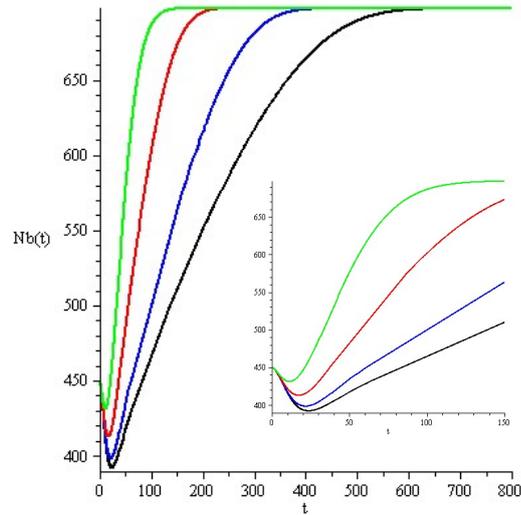


Keterangan Gambar 7 s.d. Gambar 9:

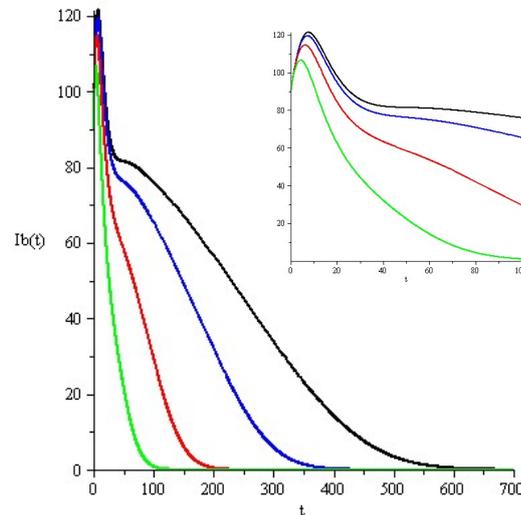


Keterangan Gambar 10 s.d Gambar 17:

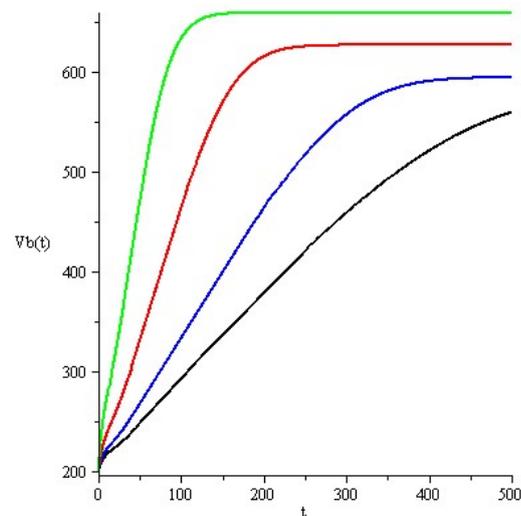




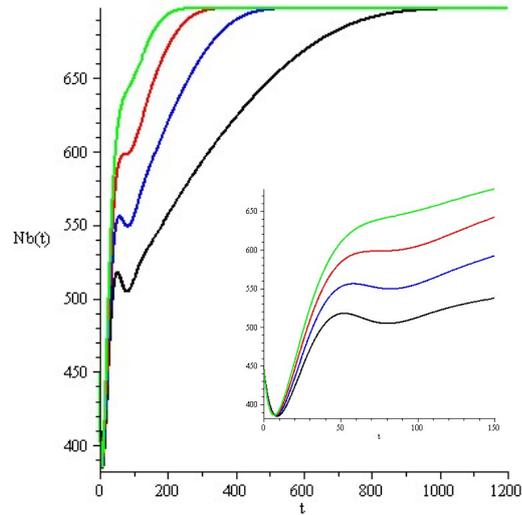
Gambar 4 Grafik kelas N_b terhadap waktu t



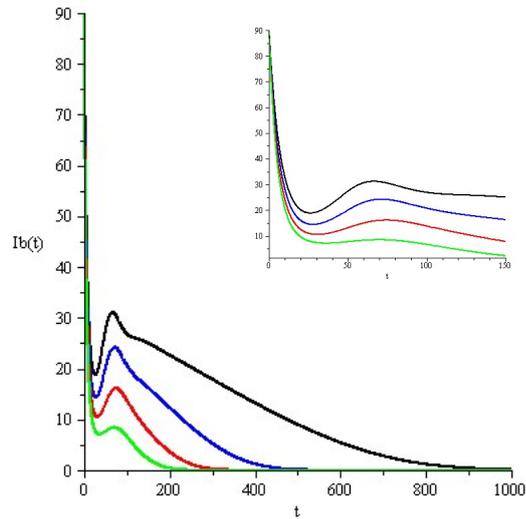
Gambar 5 Grafik kelas I_b terhadap waktu t



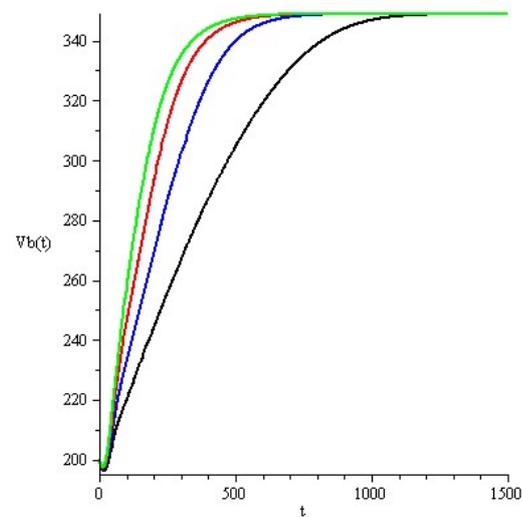
Gambar 6 Grafik kelas V_b terhadap waktu t



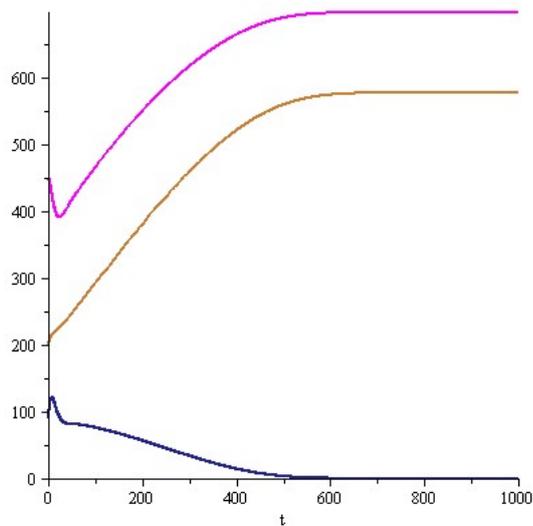
Gambar 7 Grafik kelas N_b terhadap waktu t



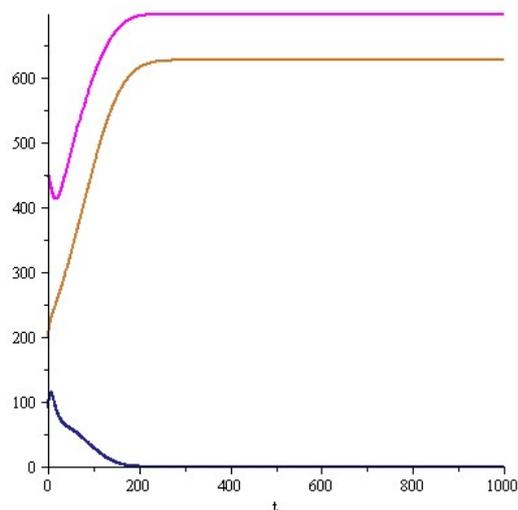
Gambar 8 Grafik kelas I_b terhadap waktu t



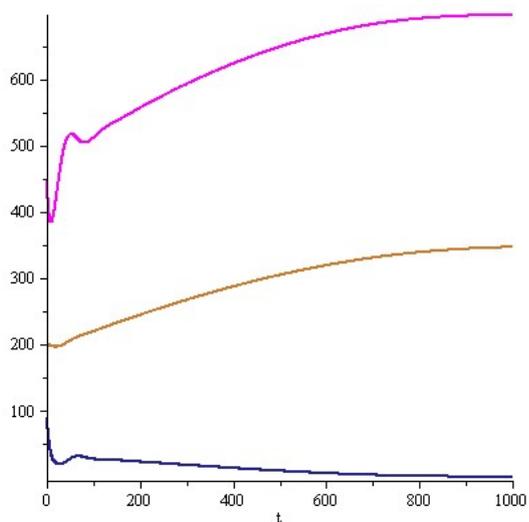
Gambar 9 grafik kelas V_b terhadap waktu t



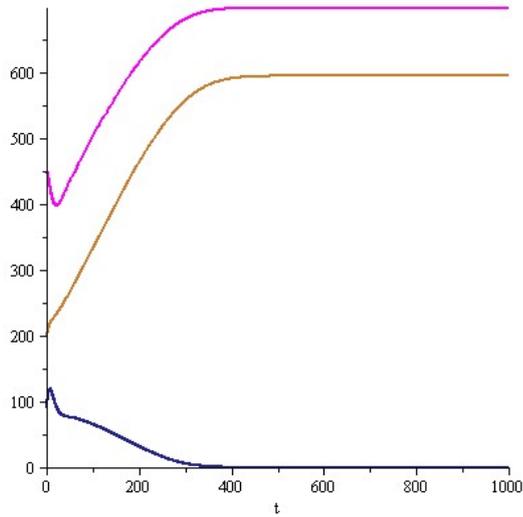
Gambar 10 Grafik $\delta = 0.025$



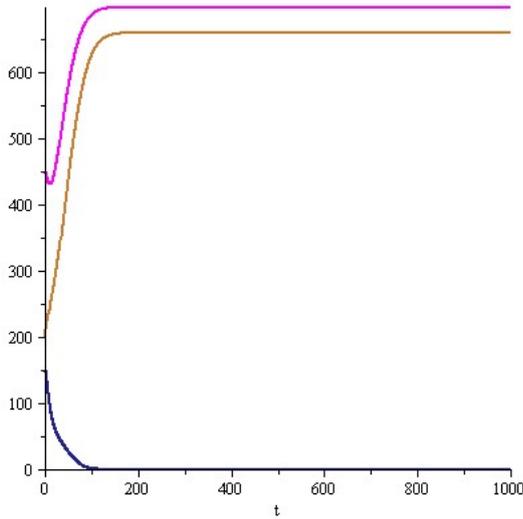
Gambar 12 Grafik $\delta = 0.046$



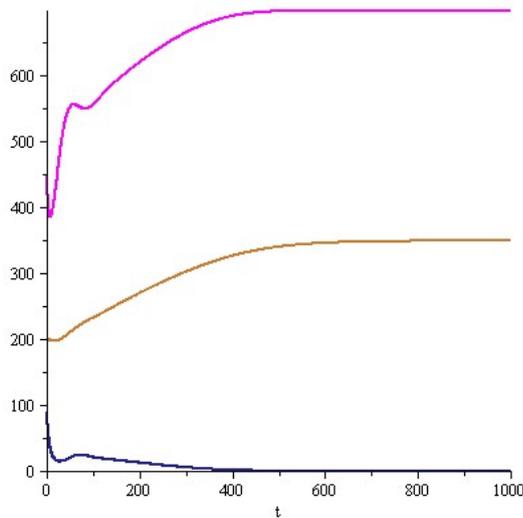
Gambar 14 Grafik $M_2 = 0.30$



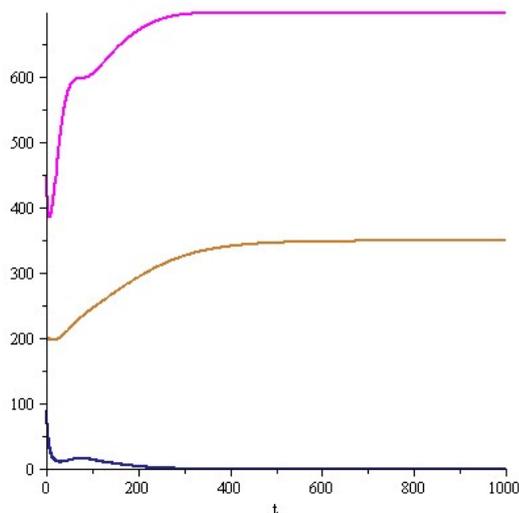
Gambar 11 Grafik $\delta = 0.030$



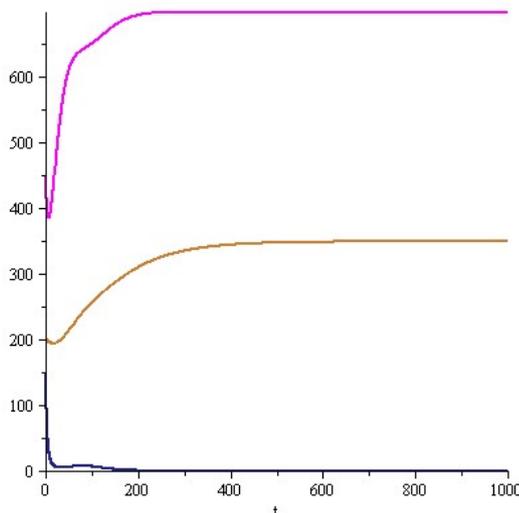
Gambar 13 Grafik $\delta = 0.089$



Gambar 15 Grafik $M_2 = 0.32$



Gambar 16 Grafik $M_2 = 0.034$



Gambar 17 Grafik $\delta = 0.036$

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas dibagi dalam enam persamaan.

Model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu bebas penyakit (P_0) dan endemik (P_1).

Diberikan
$$R_0 = \frac{\beta_b \mu_b}{(\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}$$
.

- (1) Jika $R_0 < 1$ dan $A > \mu_b$ maka Sistem mempunyai satu titik kesetimbangan, yaitu $P_0 = (S, I, N_b, I_b, V_b) = \left(K, 0, \frac{A - \mu_b}{B}, 0, \frac{\delta(A - \mu_b)}{B(\delta + \mu_b)} \right)$ dan P_0 stabil asimtotik lokal.
- (2) Jika $R_0 > 1$, $\delta = \mu_b$, $BI_b > A$, $A > \mu_b$, dan $M_1 + M_2 > 3\mu_b$ maka Sistem mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu P_0 dan $P_1 = (S, I, N_b, I_b, V_b) = (S^*, I^*, N_b^*, I_b^*, V_b^*)$

Dengan

$$S^* = \frac{K(\mu + \gamma_1)I^*}{\beta_1 I_b^*}$$

$$I^* = \frac{\beta_1 K(\mu + \theta)I_b^*}{K(\mu + \theta)(\mu + \gamma_1) + \beta_1 I_b^*(\mu + \gamma_1 + \theta)}$$

$$N_b^* = \frac{\beta_b(2\delta + \mu_b)I_b^*}{\beta_b \mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}$$

$$I_b^* = \frac{\beta_b \mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)}{B\beta_b^2(2\delta + \mu_b)^2} [\beta_b((2\delta + \mu_b)(A - \mu_b) - \mu_b(M_1 + M_2)) + (M_1 + M_2)(\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)]$$

$$V_b^* = \frac{\delta[2\beta_b \delta + (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)]I_b^*}{(\delta + \mu_b)[\beta_b \mu_b - (\mu_b + M_1 + M_2)(\delta + \mu_b)]}$$

P_0 tidak stabil dan P_1 stabil asimtotik lokal.

Berdasarkan analisis model yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa pada pertumbuhan populasi unggas secara logistik diperoleh dua titik kesetimbangan. Dari model pertumbuhan logistik ini diperoleh populasi unggas (N_b) yang memenuhi adalah $N_b = \frac{A - \mu_b}{B}$ pada kondisi bebas penyakit. Populasi unggas (N_b) adalah populasi terbesar di mana lingkungan masih mendukung populasi tanpa adanya kehilangan individu anggota populasi atau disebut dengan *carrying capacity* dari lingkungan.

Berdasarkan simulasi model matematika yang telah dilakukan diperoleh beberapa fakta, yaitu semakin besar perubahan peluang kontak antara unggas sehat dengan unggas terinfeksi (β_b) menyebabkan populasi manusia terinfeksi $I(t)$ dan populasi unggas terinfeksi $I_b(t)$ semakin besar, tetapi populasi manusia rentan $S(t)$, populasi unggas $N_b(t)$, dan populasi unggas yang divaksinasi $V_b(t)$ semakin kecil. Kemudian diperoleh fakta bahwa semakin besar proporsi unggas divaksinasi dapat mencegah terjadinya wabah endemik. Hal ini dibuktikan jika peluang kontak antara unggas sehat dan unggas terinfeksi (β_b) dan semakin besar proporsi unggas divaksinasi (δ) maka nilai $R_0 < 1$. Sedangkan semakin besar proporsi pembakaran unggas terinfeksi dapat mencegah terjadinya wabah endemik. Hal ini dibuktikan jika peluang kontak antara unggas sehat dan unggas terinfeksi (β_b) dan semakin besar proporsi pembakaran unggas terinfeksi (M_2) maka nilai $R_0 < 1$. Artinya populasi akan stabil karena penyakit akan hilang dari populasi (bebas penyakit).

DAFTAR PUSTAKA

- [1] E. Budiarto and D. Anggraeni, "Pengantar epidemiologi," *Jakarta penerbit buku Kedokt. egc*, 2003.
- [2] T. N. Padilah, "Model Epidemii SIRS dengan Pertumbuhan Logistik," *J. Silogisme Kaji. Ilmu Mat. dan Pembelajarannya*, vol. 2, no. 1, pp. 22–31, 2017.
- [3] I. Murwanti, R. Ratianingsih, and A. I. Jaya, "Studi Penyebaran Penyakit Flu Burung Melalui Kajian Dinamis Revisi Model Endemik SIRS Dengan Pemberian Vaksinasi Unggas," *Nat. Sci. J. Sci. Technol.*, vol. 2, no. 1, 2013.
- [4] D. Rahmalia, "Pemodelan Matematika dan Analisis Stabilitas dari Penyebaran Penyakit Flu Burung," *Unisda J. Math. Comput. Sci.*, vol. 1, no. 01, pp. 11–19, 2015.
- [5] N. S. Chong, "Modeling avian influenza using Filippov systems to determine culling of infected birds and quarantine," *Nonlinear Anal. real world Appl.*, vol. 24, pp. 196–218, 2015.
- [6] N. R. da S. Martins, "An overview on avian influenza," *Brazilian J. Poult. Sci.*, vol. 14, no. 2, pp. 71–87, 2012.
- [7] T. A. Hutapea, "PREVENSI PENYEBARAN VIRUS H5N1 DENGAN MODEL SI-SIIR MELALUI KONTROL VAKSINASI PADA POPULASI MANUSIA," *Gener. KAMPUS*, vol. 9, no. 2.

- [8] S. Siswanto, S. Supriyono, and W. Wuryanto, "MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN FLU BURUNG DARI UNGGAS KE MANUSIA," *Unnes J. Math.*, vol. 2, no. 1, 2013.
- [9] R. J. Iswanto, "Pemodelan matematika aplikasi dan terapannya," *Graha Ilmu, Yogyakarta*, 2012.
- [10] M. Kharis and A. N. Cahyono, "Pemodelan matematika pada epidemi influenza dengan strategi vaksinasi," *J. Mipa*, vol. 38, no. 2, pp. 176–185, 2015.
- [11] N. Nuraini and T. Tasmi, "Optimal Vaccination and Treatment Schedules in a Deterministic Avian influenza Model," *J. Math. Fundam. Sci.*, vol. 48, no. 2, pp. 164–177, 2016.