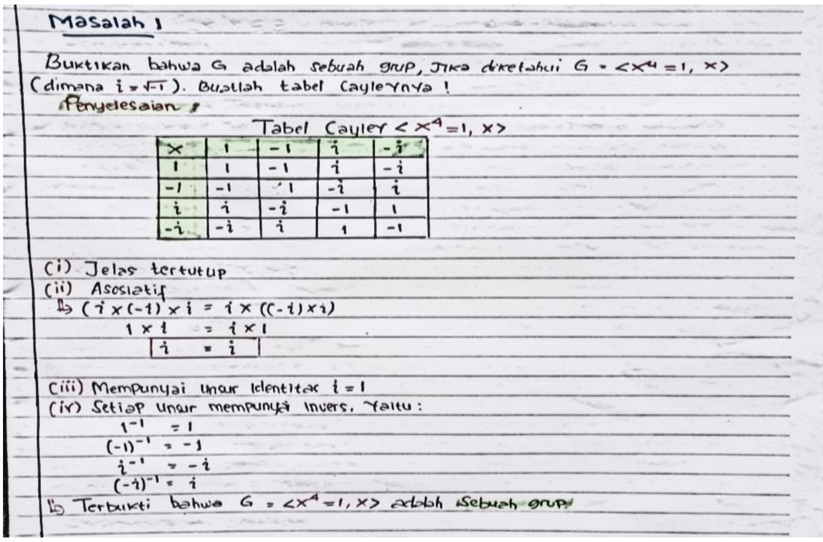
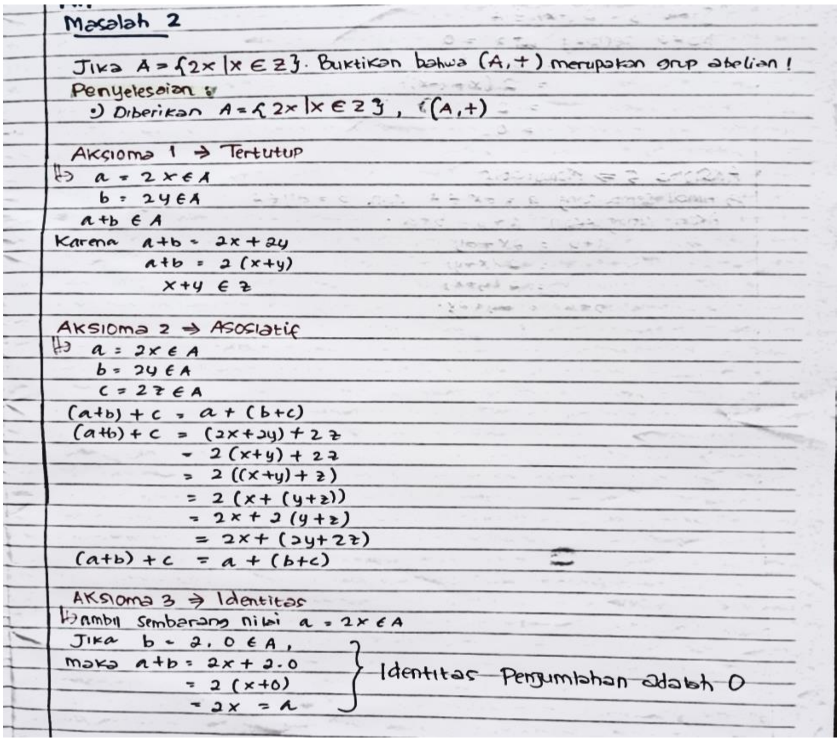
Tabel 1. Hasil tes tertulis mahasiswa

<table>
<tr><th>Subjek</th><th>Hasil</th></tr>
<tr><td>A</td><td>

Masalah 1
Buktikan bahwa G adalah sebuah grup, Jika diketahui $G = \langle x^4 = 1, \times \rangle$ (dimana $i = \sqrt{-1}$). Buatlah tabel Cayleynya !
Penyelesaian :
Tabel Cayley $\langle x^4 = 1, \times \rangle$
<table>
<tr><td>×</td><td>1</td><td>−1</td><td>i</td><td>−i</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>−1</td><td>i</td><td>−i</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>−1</td><td>1</td><td>−i</td><td>i</td></tr>
<tr><td>i</td><td>i</td><td>−i</td><td>−1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>−i</td><td>−i</td><td>i</td><td>1</td><td>−1</td></tr>
</table>
(i) Jelas tertutup
(ii) Asosiatif
↳ $(i \times (-1) \times i = i \times ((-1) \times i)$
$1 \times i = i \times 1$
$\boxed{i = i}$
(iii) Mempunyai unsur identitas $i = 1$
(iv) Setiap unsur mempunyai invers, Yaitu :
$1^{-1} = 1$
$(-1)^{-1} = -1$
$i^{-1} = -i$
$(-i)^{-1} = i$
↳ Terbukti bahwa $G = \langle x^4 = 1, \times \rangle$ adalah sebuah grup

Masalah 2
Jika $A = \{2x \mid x \in Z\}$. Buktikan bahwa $(A, +)$ merupakan grup abelian !
Penyelesaian :
•) Diberikan $A = \{2x \mid x \in Z\}$, $(A, +)$
Aksioma 1 → Tertutup
↳ $a = 2x \in A$
$b = 2y \in A$
$a + b \in A$
Karena $a + b = 2x + 2y$
$a + b = 2(x + y)$
$x + y \in Z$
Aksioma 2 → Asosiatif
↳ $a = 2x \in A$
$b = 2y \in A$
$c = 2z \in A$
$(a+b) + c = a + (b+c)$
$(a+b) + c = (2x + 2y) + 2z$
$= 2(x+y) + 2z$
$= 2((x+y) + z)$
$= 2(x + (y+z))$
$= 2x + 2(y+z)$
$= 2x + (2y + 2z)$
$(a+b) + c = a + (b+c)$
Aksioma 3 → Identitas
↳ ambil sembarang nilai $a = 2x \in A$
Jika $b = 2 . 0 \in A$,
maka $a + b = 2x + 2 . 0$
$= 2(x + 0)$
$= 2x = a$
Identitas Penjumlahan adalah 0
</td></tr>
</table>

Aksioma 4 ⇒ Invers

↳ Ambil sembarang $a = 2x \in A$

Jika $b = 2(-x) \in A$,

Maka berlaku $a + b = 0$

$$a + b = 2x + (2(-x))$$
$$= 2(x + (-x))$$
$$= 2(0)$$
$$= 0$$

Aksioma 5 ⇒ Komutatif

↳ Ambil sembarang $a = 2x \in A$ dan $b = 2y \in A$

Akan ditunjukkan $a + b = b + a$.

$$a + b = 2x + 2y$$
$$= 2(x + y)$$
$$= 2(y + x)$$
$$b + a = 2y + 2x.$$

B

1) Buktikan bahwa G adalah sebuah grup. jika diketahui $G = \langle x^4 = 1, x \rangle$ (dimana $i = \sqrt{-1}$. Buatlah tabel Cayleynya!

Penyelesaian :

Untuk $x^4 = 1$, maka :

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{\cancel{4}2} + i\sin\frac{2\pi}{\cancel{4}2} = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ = 0 + i(1) = i$$

$$x_2 = \cos\frac{2 \cdot \cancel{2}\pi}{\cancel{4}} + i\sin\frac{2 \cdot \cancel{2}\pi}{\cancel{4}} = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ = -1 + i(0) = -1$$

$$x_3 = \cos\frac{\cancel{2} \cdot 3\pi}{\cancel{4}2} + i\sin\frac{\cancel{2} \cdot 3\pi}{\cancel{4}2} = \cos 270^\circ + i\sin 270^\circ = 0 + i(-1) = -i$$

$$x_4 = \cos\frac{2 \cdot \cancel{4}\pi}{\cancel{4}} + i\sin\frac{2 \cdot \cancel{4}\pi}{\cancel{4}} = \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ = 1 + i(0) = 1$$

Sehingga, $x = \{1, -1, i, -i\}$

(i) Akan dibuktikan Tertutup

Tabel Cayley $\langle x^4 = 1, x \rangle$

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

~~(i) Akan~~ Pada tabel Cayley di atas Jelas Tertutup

(ii) Akan dibuktikan Assosiatif.

Ambil sembarang unsur, misal $a = i$, $b = -i$, $c = i$, dimana $a, b, c \in x^4 = 1$

$$(i \times (-i)) \times i = i \times ((-i) \times i)$$
$$1 \times i = i \times 1$$
$$i = i \quad \text{(Terbukti Asosiatif)}$$

(iii) Akan dibuktikan terdapat unsur identitas.

Terdapat unsur identitas, yaitu $i = 1$. ambil sembarang unsur $i \in x^4 = 1$, maka $i \times 1 = i$.

(iv) Akan dibuktikan mempunyai invers

$$1^{-1} = 1$$
$$(-1)^{-1} = -1$$
$$i^{-1} = -i$$
$$(-i)^{-1} = i$$

Terbukti bahwa $\langle x^4 = 1, x \rangle$ merupakan sebuah Grup

2) Jika $A = \{2x \mid x \in Z\}$. Buktikan bahwa $(A,+)$ merupakan grup Abelian!

Penyelesaian :

$\langle 2x \mid x \in Z, + \rangle$

Misal : $x = \{1, 2, 3\}$, $x \in Z$

Akan ditunjukkan bersifat komutatif

$a = 1$, $b = 3$, dimana $x \in Z$.

$2x = x2$, $\forall a, b \in Z$.

$a \times b = b \times a$, $\forall a, b \in Z$.

$2(1 \times 3) = (3 \times 1)2$, $\forall a, b \in Z$,

$2 . 3 = 3 . 2$

$6 = 6$ (Terbukti komutatif)

Terbukti bahwa $\langle A, + \rangle$ dimana $A = \{2x \mid x \in Z\}$ merupakan Grup Abelian!

C

1. $\langle x^4 = 1, x \rangle$, maka.

$X_k = \frac{\cos 2k\pi}{n} + i \frac{\sin 2k\pi}{n}$, diperoleh

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = i$, $x_4 = -i$,

maka tabel cayley :

*	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	1	1	-1

i) Tertutup, misal $-1, 1 \in \langle x^4 = 1 \rangle$, maka.

$-1 \times 1 = -1$ → terbukti

•) Asosiatif, misal $i, 1, -1 \in x^4 = 1$, maka

$(i \times 1)(-1) = i(1 \times (-1))$

$-i = -i$ (terbukti)

•) memiliki Invers seperti di tabel.

$1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$, $i^{-1} = -1$, $(-i)^{-1} = i$

•) ~~memiliki~~ Identitas $i = 1$.

∴ Terbukti bahwa $G = \langle x^4 = 1, x \rangle$ adalah Grup.

2. $A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$

•) tertutup, $2 + (-2) = 0$ → terbukti

•) Asosiatif, $(2 + 4) + 6 = 2 + (4 + 6)$

$12 = 12$ (terbukti)

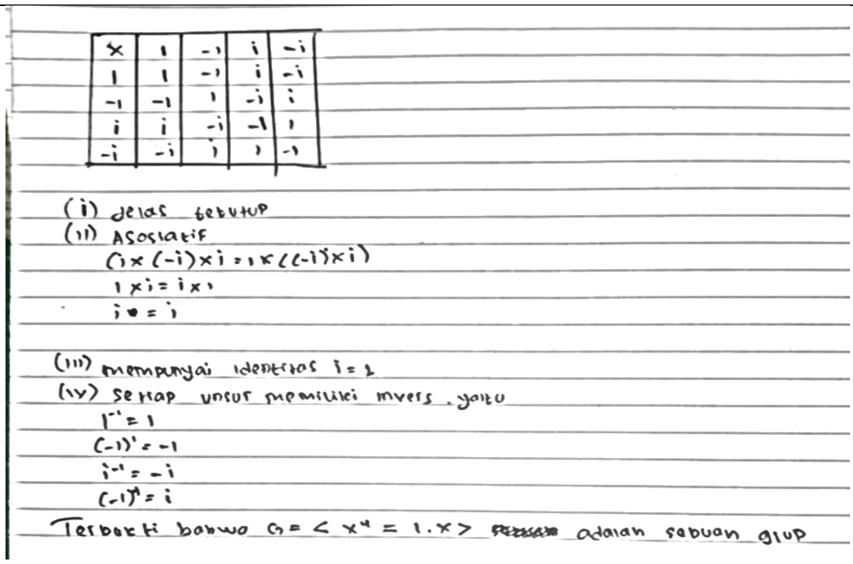
•) identitas : $2 + 0 = 2$ (0 identitas dari +)

•) invers : $2 - 2 = 0$ (terbukti)

• komutatif (abelian) : $2 + 4 = 4 + 2$

$6 = 6$ (terbukti)

∴ jadi terbukti bahwa $(A, +)$ Grup abelian.

D	

×	1	−1	i	−i
1	1	−1	i	−i
−1	−1	1	−i	i
i	i	−i	−1	1
−i	−i	i	1	−1

(i) Jelas tertutup
(ii) Asosiatif
$(1 \times (-i)) \times i = 1 \times ((-1) \times i)$
$1 \times i = i \times 1$
$i = i$

(iii) mempunyai identitas $i = 1$
(iv) setiap unsur memiliki invers, yaitu
$1^{-1} = 1$
$(-1)^{-1} = -1$
$i^{-1} = -i$
$(-i)^{-1} = i$
Terbukti bahwa $G = < x^4 = 1 . x >$ adalah sebuah grup

Tabel 2. Hasil wawancara 1

Subjek	**Hasil**
A	Subjek pertama dapat menjawab dan menjelaskan dengan baik mengenai konsep dan defenisi grup dalam struktur aljabar grup secara formal dan terperinci, kemudian juga dapat menjelaskan suatu grup abelian.
B	Subjek kedua menyebutkan bahwa Grup adalah suatu himpunan beserta satu operasi biner, seperti perkalian atau penjumlahan, yang memenuhi beberapa aksioma
C	Subjek ketiga menyatakan bahwa grup adalah sistem aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu
D	Subjek keempat kurang tepat dalam menjelaskan defenisi grup

Tabel 3. Hasil wawancara 2

Subjek	**Hasil**
A	Subjek pertama menjelaskan bahwa sebuah Grup G dengan operasi biner * dituliskan dengan simbol $< G, * >$, jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini : (i) $a * b = c \in G, \forall a, b \in G$ (ii) $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$ (iii) $\exists e \in G \ni e * a = a * e = a \in G$ (iv) $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

	Atau dapat dikatakan bahwa sebuah grup akan terbukti jika dia dapat dibuktikan tertutup, asosiatif, memiliki unsur identitas, dan terdapat invers. Kemudian akan dikatakan grup abelian, jika sebuah grup dapat dinyatakan ataupun dibuktikan dalam bentuk komutatif, dimana axb akan sama dengan bxa atau a*b = b*a untuk setiap bilangan bulat.
B	Subjek kedua kurang lengkap dalam menjelaskan karakteristik sebuah grup dan grup akan dikatakan abelian, subjek kedua hanya menyebutkan bahwa sebuah Grup G disebut Grup Abelian atau Komutatif jika berlaku $a * b = b * a \ \forall\ a, b \in G$.
C	Sama hal nya dengan subjek kedua, subjek ketiga menyebutkan bahwa sebuah grup dinyatakan abelian jika di dalamnya berlaku sifat komutatif.
D	Subjek keempat menyatakan bahwa karakteristik grup adalah jika dapat dibuktikan dan komutatif.

Tabel 4. Hasil wawancara 3

Subjek	**Hasil**
A	Subjek pertama memberikan contoh bahwa himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan adalah grup, sedangkan himpunan bilangan bulat dengan operasi perkalian bukanlah grup. Hal ini dikarenakan untuk setiap operasi penjumlahan bilangan bulat, maka hasilnya bilangan bulat, dan ini dapat dibuktikan bahwa bilangan bulat dengan operasi penjumlahan bersifat tertutup. Kemudian dapat dibuktikan juga asosiatif, terdapat identitas penjumlahan dan juga mempunyai invers. Sedangkan, bilangan bulat dengan operasi perkalian tidak dapat dikatakan sebagai grup dikarenakan tidak memiliki invers, hal ini dapat dibuktikan bahwa jika a adalah sebuah bilangan bulat, maka invers perkalian dari a adalah a^{-1} atau $\frac{1}{a}$, sedangkan $\frac{1}{a}$ adalah bilangan pecahan, dan pecahan bukanlah anggota dari himpunan bilangan bulat
B	Subjek kedua memberikan contoh $< U8, \times>$ merupakan sebuah Grup karena memenuhi semua syarat grup. Contoh bukan grup adalah Himpunan bilangan asli (N) tidak bersifat tertutup terhadap operasi pengurangan.
C	Subjek ketiga memberikan contoh <Z,+> adalah sebuah grup

D	Subjek keempat kurang tepat dalam memberikan contoh, subjek keempat menyatakan bahwa himpunan bilangan asli bukanlah grup