SEMI HASIL KALI DALAM ATAS DAN BAWAH

Febi Sanjaya
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP USD
Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta, febi@usd.ac.id

ABSTRAK

Konsep hasil kali dalam merupakan salah satu objek matematika yang dipelajari dan dikembangkan oleh para peneliti. Setiap hasil kali dalam dapat membangun norma, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Oleh karena itu di dalam artikel ini dituliskan konsep mengenai semi hasil kali dalam atas dan bawah yang merupakan pendekatan hasil kali dalam yang dibangun dari norma. Penelitian ini menggunakan metode studi literatur yang bertujuan untuk mempelajari sifat-sifat semi hasil kali dalam atas dan bawah beserta hubungannya dengan semi hasil kali dalam yang lain.

Kata Kunci: semi hasil kali dalam atas, semi hasil kali dalam bawah, semi hasil kali dalam Lumer-Giles.

ABSTRACT

The concept of inner product is a mathematic object which is learned and developed by the researchers. Every inner product built the norm, but not vice-versa. Therefore, in this article the researcher wrote the concept about superior and inferior semi-inner product which is an approach of inner product that was built by norm. This research used literature study method with the goal is for study some properties of superior and inferior semi-inner product and the relation of superior and inferior semi-inner product with other semi-inner product.

Keywords : superior semi-inner product, inferior semi-inner product, semi-inner product Lumer-Giles

Pendahuluan

Dalam mempelajari analisis fungsional, sesungguhnya tidak dapat dilepaskan dari konsep ruang bernorma, yaitu ruang vektor yang dilengkapi dengan norma. Lebih khusus lagi, terdapat konsep ruang hasil kali dalam, yaitu ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam. Konsep hasil kali dalam merupakan salah satu objek matematika yang dipelajari dan dikembangkan oleh para peneliti. Salah satu arah pengembangannya adalah dengan membentuk generalisasinya.

Giles (1967) membentuk generalisasi dari hasil kali dalam dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 1.1. Diberikan sebarang ruang vektor X atas lapangan $\mathbb{K}$. Fungsi $[.,.] : X \times X \to \mathbb{K}$ disebut semi hasil kali dalam Lumer-Giles jika sifat-sifat di bawah ini dipenuhi :

(i) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

(ii) $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\lambda \in K$.

(iii) $[x, x] \geq 0$ untuk setiap $x \in X$ dan $x = 0$ jika [x, x] = 0.

(iv) $|[x, x]|^2 \leq [x, x][y, y]$.

(v) $[x, \lambda y] = \bar{\lambda}[x, y]$ untuk setiap x, y ∈ X dan λ ∈ K.

Selain itu, Giles (1967) juga menuliskan hubungan antara norma dan semi hasil kali dalam Lumer-Giles dalam teorema di bawah ini.

Teorema 1.2. Diberikan ruang vektor X atas lapangan K dan semi hasil kali dalam Lumer-Giles $[.,.]$. Fungsi $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ dengan $\| x \| = [x, x]^{\frac{1}{2}}$ merupakan norma pada X.

Selanjutnya, untuk sebarang ruang bernorma $(X, \|.\|)$, keluarga semi hasil kali dalam Lumer-Giles yang membangkitkan norma $\|.\|$ pada X sebagaimana didefinisikan pada Teorema 1.2 dinotasikan dengan $S_{\|\cdot\|}$.

Dragomir (2004) memiliki konsep yang berbeda dalam menggeneralisasikan hasil kali dalam, yaitu membangun fungsi yang sifat-sifatnya lebih lemah dari inner produk tetapi dibangkitkan dari norma. Semi hasil kali dalam atas dan bawah dari $x, y \in X$, yang berturut-turut ditulis $(x, y)_r$ dan $(x, y)_l$, dengan X merupakan ruang bernorma didefinisikan sebagai

$$(x, y)_r = \lim_{t \to 0^+} \frac{\|y + tx\|^2 - \|y\|^2}{2t}$$

$$(x, y)_\ell = \lim_{t \to 0^-} \frac{\|y + tx\|^2 - \|y\|^2}{2t}.$$

Inilah konsep yang membuat penulis tertarik untuk menelitinya.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mempelajari sifat-sifat semi hasil kali dalam atas dan bawah beserta hubungannya dengan semi hasil kali dalam yang lain.

Metode Penelitian

Metode yang digunakan untuk penelitian ini adalah studi literatur. Dalam penelitian ini terlebih dahulu dipelajari tentang fungsi konveks dan norma. Dari kedua konsep tersebut, dapat dipelajari definisi dari semi hasil kali dalam atas dan bawah. Selanjutnya dipelajari tentang hasil kali dalam. Dengan menggunakan hasil kali dalam, norma, dan definisi semi hasil kali dalam atas dan bawah dihasilkan sifat-sifat dari semi hasil kali dalam atas dan bawah. Kemudian dari hasil kali dalam dan norma dapat dipelajari dual dari ruang bernorma. Dari dual, dan dengan menggunakan Teorema Hahn-Banach dapat dipelajari *normalized duality mapping.* Lebih lanjut, dipelajari bentuk lain definisi semi hasil kali dalam atas dan bawah dalam kaitannya dengan *normalized duality mapping*. Pada bagian akhir dipelajari semi hasil kali dalam Lumer-Giles dan kaitannya dengan semi hasil kali dalam atas dan bawah, yang menghasilkan bentuk lain definisi semi hasil kali dalam atas dan bawah dengan menggunakan semi hasil kali dalam Lumer-Giles.

Hasil dan Pembahasan

Untuk selanjutnya, lapangan yang digunakan adalah $\mathbb{R}$ kecuali dinyatakan lain. Untuk sebarang ruang bernorma X, diambil sebarang x, y ∈ X. Didefinisikan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(t) = \frac{1}{2} \| x + ty \|^2.$$

Diperhatikan bahwa untuk sebarang a, b ∈ R dan $0 \leq \lambda \leq 1$ berlaku:

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b)$$

$$= \frac{1}{2} \| x + (\lambda a + (1 - \lambda)b)y \|^2$$

$$= \frac{1}{2} \| \lambda x + (1 - \lambda)x + \lambda ay + (1 - \lambda)by \|^2$$

$$= \frac{1}{2} \| \lambda(x + ay) + (1 - \lambda)(x + by) \|^2$$

$$\leq \frac{1}{2}(\lambda \| x + ay \| + (1 - \lambda) \| x + by \|)^2$$

$$\leq \frac{1}{2}(\lambda \| x + ay \|^2 + (1 - \lambda) \| x + by \|^2)$$

$$= \lambda \frac{1}{2} \| x + ay \|^2 + (1 - \lambda) \frac{1}{2} \| x + by \|^2$$

$$= \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b).$$

Dengan demikian f konveks. Akibatnya, $\lim_{t \to 0^+} \frac{\| y + tx \|^2 - \| y \|^2}{2t}$, dan $\lim_{t \to 0^-} \frac{\| y + tx \|^2 - \| y \|^2}{2t}$ ada sehingga eksistensi $\lim_{t \to 0^+} \frac{\| y + tx \|^2 - \| y \|^2}{2t}$ dan $\lim_{t \to 0^-} \frac{\| y + tx \|^2 - \| y \|^2}{2t}$ terjamin. Oleh karena itu, dapat diturunkan definisi berikut.

Definisi 3.1. Diberikan ruang bernorma X. Didefinisikan fungsi $(.,.)_\ell, (.,.)_r : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$(x, y)_r = \lim_{t \to 0^+} \frac{\| y + tx \|^2 - \| y \|^2}{2t} \text{ dan}$$

$$(x, y)_l = \lim_{t \to 0^-} \frac{\| y + tx \|^2 - \| y \|^2}{2t}$$

untuk setiap $x, y \in X$. Selanjutnya, fungsi $(.,.)_\ell$ dan $(.,.)_r$ berturut-turut disebut semi hasil kali dalam bawah dan semi hasil kali dalam atas terkait norma $\|.\|$.

Sifat 3.2. Jika X merupakan ruang bernorma, maka untuk setiap $x, y \in X$ dan $p, q \in \{\ell, r\}$ dan $p \neq q$ berlaku :

(i) $(x, x)_p = \| x \|^2$.

(ii) $(\lambda x, y)_p = \lambda(x, y)_p$ untuk semua $\lambda \geq 0$.

(iii) $(x, \lambda y)_p = \lambda(x, y)_p$ untuk semua $\lambda \geq 0$.

(iv) $(\lambda x, y)_p = \lambda(x, y)_q$ untuk semua $\lambda < 0$.

(v) $(x, \lambda y)_p = \lambda(x, y)_q$ untuk semua $\lambda < 0$.

(vi) $| (x, y)_p | \leq \| x \| \| y \|$.

(vii) $(x + y, z)_r \leq (x, z)_r + (y, z)_r$.

(viii) $(x + y, z)_\ell \geq (x, z)_\ell + (y, z)_\ell$.

Selanjutnya, jika $(X, \|.\|)$ merupakan ruang hasil kali dalam, maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $(x, y)_\ell = \langle x, y \rangle =$

$(x,z)_r$ (Alsina, dkk : 2010). Lebih lanjut, $(x\,,y)_p = (y,x)_p$ untuk p ∈ {r, ℓ }.

Teorema 3.3. Diberikan ruang bernorma X. Untuk setiap $x,y \in X$, terdapat $w_1, w_2 \in J(x)$ sehingga $(y,x)_r = w_1(y)$ dan $(y,x)_r = w_2(y)$.

Bukti : Diambil sebarang x, y ∈ X. Didefinisikan $\Psi = \{ax + by \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. Diperhatikan fungsional linear $f : \Psi \to \mathbb{R}$ dengan $f(ax + by) = a \parallel x \parallel^2 + b(y,x)_r$ untuk setiap $a,b \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan bahwa $f(ax+by) \leq \parallel ax+by \parallel \parallel x \parallel$ untuk setiap $a,b \in \mathbb{R}$. Misalkan

$$\lambda_+ = \lim_{t\to 0^+} \frac{\|y+tx\| - \|x\|}{t}$$

dan

$$\lambda_- = \lim_{t\to 0^-} \frac{\|y+tx\| - \|x\|}{t}$$

maka

$$(y,x)_r = ||x||\lambda_+ \text{ dan } (y,x)_\ell = ||x||\lambda_-$$

Karena fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(t) = \parallel x + ty \parallel$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, merupakan fungsi konveks, maka untuk setiap $t \in \mathbb{R}$ berlaku $t\lambda + \leq \parallel x + ty \parallel - \parallel x \parallel$ yang ekuivalen dengan $\parallel x \parallel + t\lambda + \leq \parallel x + ty \parallel$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$. ... (1)

Diambil sebarang $a,b \in \mathbb{R}$.

Jika a > 0, maka berdasarkan ketaksamaan (1), diperoleh :

$$a \parallel x \parallel + b\lambda_+ = a\left[\parallel x \parallel + \frac{b}{a}\lambda_+\right]$$
$$\leq a\left[\parallel x \parallel + \frac{b}{a}y\right] = \parallel ax + by \parallel.$$

Jika a < 0, diperoleh pula :

$$a \parallel x \parallel + b\lambda_+ = -a\left[-\left||x|\right| + \frac{b}{-a}\lambda_+\right]$$
$$= -a\left[-2\left||x|\right| + \left||x|\right| + \frac{b}{-a}\lambda_+\right]$$
$$\leq -a\left[-2\left||x|\right| + ||x - \frac{b}{a}y\right]$$
$$= -a\left[\left\|-x - \frac{b}{a}y\right\|\right]$$
$$= \parallel ax + by \parallel.$$

Jika a = 0, diperoleh

$$b\lambda + \leq \parallel x + by \parallel - \parallel x \parallel \leq \parallel by \parallel.$$

Dari ketiga kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa

$$a \parallel x \parallel + b\lambda_+ \leq \parallel ax + by \parallel,$$

sehingga

$$f(ax + by) = a \parallel x \parallel^2 + b \parallel x \parallel \lambda_+$$
$$= (a \parallel x \parallel + b\lambda_+) \parallel x \parallel$$
$$\leq \parallel ax + by \parallel \parallel x \parallel$$

untuk setiap $a,b \in R$. Ini berakibat f terbatas dan $\parallel f \parallel \leq \parallel x \parallel$. Lebih lanjut, $\parallel f \parallel = \parallel x \parallel$ karena untuk $\frac{1}{||x||}x \in \Psi$, $f\left(\frac{1}{||x||}x\right) = \|x\|$.

Selanjutnya berdasarkan Teorema Hahn-Banach, terdapat fungsional $w_1 : X \to \mathbb{R}$ sehingga $w_1(u) = f(u)$ untuk setiap u ∈ Ψ dan $\parallel w_1 \parallel = \parallel f \parallel = \parallel x \parallel$.

Karena $x \in \Psi$ maka $w_1(x) = f(x) = \parallel x \parallel^2$ yang berarti $w_1 \in J(x)$. Selanjutnya, dengan mengambil $a = 0$ dan $b = 1$ diperoleh $(y,x)r = f(y) = w_1(y)$.

Dengan menggunakan teorema di atas, dapat diturunkan suatu teorema tentang ekuivalensi dari semi hasil kali dalam atas dan bawah dalam kaitannya dengan *normalized duality mapping* sebagai berikut.

Teorema 3.4. Diberikan ruang bernorma X atas lapangan $\mathbb{R}$. Untuk setiap $x, y \in X$, berlaku :

(i) $(y, x)_r = sup\{w(y) : w \in J(x)\}$, dan

(ii) $(y, x)_\ell = inf\{w(y) : w \in J(x)\}$.

Bukti :

(i) Diambil sebarang $x, y \in X$ dan $w \in J(x)$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $t \in R$ berlaku $(\| x + ty \| - \| x \|)^2 \geq 0$, sehingga

$\| x + ty \|^2 + \| x \|^2 \geq 2 \| x + ty \| \| x \|$.

Karena $w(x) = \| x \|^2$, diperoleh

$$\| x + ty \|^2 + 2w(x)$$
$$\geq \| x \|^2 + \| x + ty \| \| x \|.$$

Ekuivalen dengan,

$$\frac{\|x + ty\|^2 - \|x\|^2}{2} \geq \| x + ty \| \| x \| - w(x). \quad \ldots (2)$$

Selanjutnya, karena $\| w \| = \| x \|$ maka untuk setiap $t \in R$ berlaku

$$w\left(\frac{x + ty}{\| x + ty \|}\right) \leq \| x \|.$$

Dengan kata lain,

$$w(x + ty) \leq \| x + ty \| \| x \|.$$

Ekuivalen dengan

$$tw(y) \leq \| x + ty \| \| x \| - w(x).$$

... (3)

Dari (2) dan (3), untuk $t > 0$ diperoleh

$$\frac{\| x + ty \|^2 - \| x \|^2}{2t} \geq w(y)$$

Akibatnya, $(y, x)_r \geq w(y)$.

Di lain pihak, berdasarkan Teorema 3.3, terdapat $w_1 \in J(x)$ sehingga $(y, x)_r = w_1(y)$. Ini mengakibatkan

$$(y, x)_r = sup\{w(y) : w \in J(x)\}.$$

(ii) Diambil sebarang $x, y \in X$. Berdasarkan (i), diperoleh

$$(-y, x)_r = sup\{w(-y) : w \in J(x)\}$$
$$= sup\{-w(y) : w \in J(x)\}$$
$$= -inf\{w(y) : w \in J(x)\}.$$

Karena $(-y, x)_r = -(y, x)_\ell$ maka $-(y, x)_\ell = -inf\{w(y) : w \in J(x)\}$.

Dengan kata lain

$$(y, x)_\ell = inf\{w(y) : w \in J(x)\}.$$

Teorema 3.5. Diberikan ruang bernorma X atas lapangan $\mathbb{R}$ dan $\bar{J}$ merupakan *section of normalized duality mapping*. Untuk semua $x, y \in X$ berlaku :

$$(y, x)_r = \lim_{t \to 0^+} \bar{J}_{(x+ty)}(y)$$
$$(y, x)_\ell = \lim_{t \to 0^-} \bar{J}_{(x+ty)}(y)$$

Bukti : Karena $\bar{J}$ merupakan *section of normalized duality mapping*, maka untuk setiap

$x, y \in X, x \neq \theta$ dan $t > 0$ berlaku

$$\| x + ty \| - \| x \| = \frac{\| x + ty \| \| x \| - \| x \|^2}{\| x \|}$$
$$= \frac{\| \bar{J}_x \| \| x + ty \| - \| x \|^2}{\| x \|}$$
$$\geq \frac{|\bar{J}_x(x + ty)| - \| x \|^2}{\| x \|}$$
$$\geq \frac{\bar{J}_x(x + ty) - \| x \|^2}{\| x \|}$$

$$= \frac{\bar{J}_{x}(x) + t\bar{J}_{x}(y) - \| x \|^{2}}{\| x \|}$$

$$= t\frac{\bar{J}_{x}(y)}{\| x \|}$$

Untuk $x = \theta$ berlaku

$$\frac{\| x + ty \| \| x \| - \| x \|^{2}}{\| x \|} = \| y \|$$

$$\geq 0 = \Theta(y) = \bar{J}_{x}(y)$$

Jadi untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$ diperoleh

$$\frac{\| x + ty \| \| x \| - \| x \|^{2}}{t} = \| y \| \geq \bar{J}_{x}(y) \quad \dots (4)$$

Selanjutnya, untuk $t > 0$ dan sebarang $x, y \in X$ dangan $x + ty \neq \theta$ diperoleh

$$\frac{\| x + ty \| - \| x \|}{t}$$

$$= \frac{\| x + ty \|^{2} - \| x \| \| x + ty \|}{t \| x + ty \|}$$

$$= \frac{\bar{J}_{(x+ty)}(x + ty) - \| x \| \| x + ty \|}{t \| x + ty \|}$$

$$\leq \frac{\bar{J}_{(x+ty)}(y)}{\| x + ty \|}$$

Untuk $t > 0$ dan $x + ty = \theta$ berlaku

$$\| x + ty \| \frac{\| x + ty \| - \| x \|}{t} = 0 = \Theta(x)$$

$$= \bar{J}_{(x+ty)}(y).$$

Akibatnya, diperoleh ketaksamaan :

$$\| x + ty \| \frac{\| x + ty \| - \| x \|}{t} \leq \bar{J}_{(x+ty)}(y) \quad \dots (5)$$

untuk semua t > 0 dan x, y ∈ X.

Selanjutnya, pada ketaksamaan (4) dengan mengganti x dengan $x + ty$, diperoleh :

$$\| x + ty \| \frac{\| x + 2ty \| - \| x + ty \|}{t} \geq \bar{J}_{(x+ty)}(y) \quad \dots (6)$$

Dengan memperhatikan (5) dan (6), didapat

$$\| x + ty \| \frac{\| x + 2ty \| - \| x + ty \|}{t}$$

$$\geq \bar{J}_{(x+ty)}(y)$$

$$\geq \| x + ty \| \frac{\| x + ty \| - \| x \|}{t} \dots (7)$$

untuk setiap t > 0 dan x, y ∈ X.

Karena

$$\lim_{t \to 0^{+}} \| x + ty \| \frac{\| x + ty \| - \| x \|}{t}$$

$$= \| x \| \lim_{t \to 0^{+}} \frac{\| x + ty \| - \| x \|}{t} = (x, y)_{r}$$

$$\lim_{t \to 0^{+}} \| x + ty \| \frac{\| x + ty \| - \| x \|}{t}$$

$$= \| x \| \lim_{t \to 0^{+}} \frac{\| x + ty \| - \| x \|}{t}$$

$$= (x, y)_{r}$$

dan

$$\lim_{t \to 0^{+}} \| x + ty \| \frac{\| x + 2ty \| - \| x + ty \|}{t}$$

$$= \|x\|$$

$$\lim_{t \to 0^{+}} \frac{\| x + 2ty \| - \| x \| - \| x + ty \| + \| x \|}{t}$$

$$= \| x \| \left(2 \lim_{t \to 0^{+}} \frac{\| x + 2ty \| - \| x \|}{2t}\right.$$

$$\left. - \lim_{t \to 0^{+}} \frac{\| x + ty \| - \| x \|}{t}\right)$$

$$= \| x \| \lim_{t \to 0^{+}} \frac{\| x + ty \| - \| x \|}{t} = (y, x)_{r}$$

untuk setiap dan $x, y \in X$, maka jika diambil limit untuk $t \to 0^{+}$ pada ketaksamaan (7), dapat disimpulkan bahwa $\lim_{t \to 0^{+}} \bar{J}_{(x+ty)}(y)$ ada untuk setiap dan $x, y \in X$. Lebih lanjut,

$$\lim_{t \to 0^{+}} \bar{J}_{(x+ty)}(y) = (y, x)_{r} \dots (8)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan (8), diperoleh

$$(y,x)_l = -(-y,x)_r = -\lim_{t\to 0^+} \overline{J}_{(x+t(-y))}(-y)$$
$$= \lim_{-t\to 0^-} \overline{J}_{(x+(-t)y)}(y)$$
$$= \lim_{t\to 0^-} \overline{J}_{(x+ty)}(y)$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Selain teorema di atas, ternyata bentuk lain dari semi hasil kali dalam atas dan bawah dalam kaitannya dengan *section of normalized duality mapping* dapat dinyatakan sebagai berikut.

Teorema 3.6. Diberikan ruang bernorma X atas lapangan ℝ dan *section of normalized duality mapping* $\overline{J}$. Untuk semua $x, y \in X$ berlaku :

$$(y,x)_r = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\overline{J}_{(x+ty)} - \overline{J}_x)(x)}{t},$$

dan

$$(y,x)_\ell = \lim_{t\to 0^-} \frac{(\overline{J}_{(x+ty)} - \overline{J}_x)(x)}{t}.$$

Bukti : Untuk setiap $x, y \in X$ dan $t \neq 0$ dapat diturunkan kesamaan

$$\frac{\| x + ty \|^2 - \| x \|^2}{t}$$
$$= \frac{\overline{J}_{(x+ty)}(x+ty) - \overline{J}_x(x)}{t}$$
$$= \frac{\overline{J}_{(x+ty)}(x) + t\overline{J}_{(x+ty)}(y) - \overline{J}_x(x)}{t}$$

$$\frac{\| x + ty \|^2 - \| x \|^2}{t}$$
$$= \frac{\overline{J}_{(x+ty)}(x+ty) - \overline{J}_x(x)}{t}$$
$$= \frac{\overline{J}_{(x+ty)}(x) + t\overline{J}_{(x+ty)}(y) - \overline{J}_x(x)}{t}$$
$$= \frac{(\overline{J}_{(x+ty)} - \overline{J}_x)(x)}{t} + \overline{J}_{(x+ty)}(y) \ldots (1)$$

Karena

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\| x + ty \|^2 - \| x \|^2}{t} = 2\,(y,x)_r$$

dan karena Teorema 3.5, yaitu

$$(y,x)_r = \lim_{t\to 0^+} \overline{J}_{(x+ty)}(y)$$

maka dari kesamaan (1), dengan mengambil limit pada t untuk $t \to 0^+$ didapat

$$(y,x)_r = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\overline{J}_{(x+ty)} - \overline{J}_x)(x)}{t}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$(y,x)_\ell = \lim_{t\to 0^-} \frac{(\overline{J}_{(x+ty)} - \overline{J}_x)(x)}{t}.$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Teorema 3.7. Diberikan ruang bernorma X atas lapangan ℝ. Semi hasil kali dalam atas dan bawah dari x, y ∈ X dapat dinyatakan sebagai berikut :

$(y,x)r = sup\{[y,x] : [.,.] \in S_{\|.\|}\}$, dan

$(y,x)_\ell = inf\{[y,x] : [.,.] \in S_{\|.\|}\}$.

Bukti : Dambil sebarang $x \in X$ dan semi hasil kali dalam Lumer-Giles $[.,.] \in S_{\|.\|}$. Diperhatikan fungsi $f_x : X \to R$, dengan $f_x(y) = [y,x]$ untuk setiap $y \in X$. Untuk sebarang $y, z \in X$ dan skalar a, b berlaku

$$f_x(ay + bz) = [ay + bz, x]$$
$$= a[y,x] + b[z,x]$$
$$= af_x(y) + bf_x(z)$$

dan

$$| f_x(y) | = | [x,y] | \leq \sqrt{[x,x][y,y]}$$
$$= \| x \| \| y \|,$$

sehingga $f_x \in X^*$. Lebih lanjut,

$\| f_x \| = \| x \|$ karena $\|f_x\| \leq \|x\|$ dan

$$f_x = \left(\frac{x}{\| x \|}\right) = \left[\frac{x}{\| x \|}, x\right] = \| x \|.$$

Diperoleh pula $f_x(x) = \| x \|^2$. Dengan demikian $f_x \in J(x)$.

Ini berakibat

$$\{f_x = [., x] : [.,.] \in S_{\|.\|}\} \subseteq J(x)$$

sehingga

$$\{[y, x] : [.,.] \in S_{\|.\|}\} \subseteq \{w(y) : w \in J(x)\}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$sup\{[y, x] : [.,.] \in S_{\|.\|}\}$$
$$\leq sup\{w(y) : w \in J(x)\}.$$

Berdasarkan Teorema 3.4 maka

$$sup\{[y, x] : [.,.] \in S_{\|.\|}\} \leq (y, x)_r.$$

Selanjutnya, berdasarkan Teorema 3.3, terdapat $w_1 \in J(x)$ sehingga

$$w_1(y) = (y, x)_r.$$

Diambil sebarang *section of normalized duality mapping* $\tilde{J}$ dengan $\tilde{J}_x = w_1$. Untuk setiap $z, u \in X$ didefinisikan $[u, z] = \tilde{J}_z(u)$. Dengan demikian, $[.,.] \in S_{\|.\|}$

dan $[y, x] = \tilde{J}_x(y) = w_1(y) = (y, x)_r$.

Dengan kata lain,

$$(y, x)_r = sup\{[y, x] : [.,.] \in S_{\|.\|}\}.$$

Untuk selanjutnya,

$$(y, x)_\ell = -(-y, x)_r$$
$$= -sup\{-[y, x] : [.,.] \in S_{\|.\|}\}$$
$$= inf\{[y, x] : [.,.] \in S_{\|.\|}\}.$$

Dari teorema tersebut dan dengan menggunakan sifat dasar dari supremum dan infimum, maka dapat disimpulkan akibat sebagai berikut.

Akibat 3.8. Diberikan ruang bernorma X atas lapangan R dan $[.,.] \in S_{\|.\|}$. Untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$(y, x)_\ell \leq [y, x] \leq (y, x)_r.$$

Selanjutnya akan diberikan bentuk lain dari semi hasil kali dalam atas dan bawah dalam kaitannya dengan semi hasil kali dalam Lumer-Giles melalui teorema berikut.

Teorema 3.9. Diberikan ruang bernorma X atas lapangan $\mathbb{R}$ dan $[.,.] \in S_{\|.\|}$. Untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$(y, x)_r = \lim_{t \to 0^+} [y, x + ty]$$

dan

$$(y, x)_\ell = \lim_{t \to 0^-} [y, x + ty].$$

Bukti : Diambil sebarang $x, y \in X$. Berdasarkan Teorema 3.10, dapat dibangun irisan dari fungsi dualitas yang ternormalisas $\bar{J}$ dengan $\bar{J}_v(u) = [u, v]$ untuk sebarang $u, v \in X$. Selanjutnya dari Teorema 3.5 diperoleh $(y, x)_r = \lim_{t \to 0^+} \bar{J}_{(x+ty)}(y)$. Dari kedua hasil tersebut maka

$$(y, x)_r = \lim_{t \to 0^+} [y, x + ty].$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$(y, x)_\ell = \lim_{t \to 0^-} [y, x + ty].$$

Sebelum dilanjutkan pada teorema selanjutnya, terlebih dahulu akan diberikan beberapa teorema yang akan dipakai pada pembuktian teorema selanjutnya.

Teorema 3.10. (Dragomir, 2004) Diberikan ruang bernorma X atas lapangan $\mathbb{K}$. Untuk setiap *section of normalized duality mapping* $\bar{J}$ terdapat semi hasil kali dalam Lumer-Giles [., .]

$\in S_{\|\cdot\|}$. Begitu juga sebaliknya, untuk setiap semi hasil kali dalam Lumer-Giles [., .] $\in S_{\|\cdot\|}$ terdapat *section of normalized duality mapping* $\bar{J}$.

Teorema **3.11. (Dragomir, 2004)** Diberikan ruang bernorma X atas lapangan $\mathbb{K}$.. Jika X *smooth* maka terdapat dengan tunggal semi hasil kali dalam Lumer-Giles $[.,.] \in S_{\|\cdot\|}$ yang membangun $\|.\|$.

Selain beberapa teorema di atas, ternyata ekuivalensi dari semi hasil kali dalam atas dan bawah dalam kaitannya dengan semi hasil kali dalam Lumer-Giles dapat dinyatakan dalam bentuk lain sebagai berikut.

Teorema 3.12. Diberikan ruang bernorma X atas lapangan $\mathbb{R}$ dan [., .] $\in S_{\|.\|}$. Untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$(y,x)_r = \lim_{t\to 0^+} \frac{Re[x.x+ty] - \|x\|^2}{t}$$

$$(y,x)_\ell = \lim_{t\to 0^-} \frac{Re[x.x+ty] - \|x\|^2}{t}$$

Bukti : Diambil sebarang $x, y \in X$. Berdasarkan Teorema 3.10, dapat dibangun *section of normalized duality mapping* $\bar{J}$ dengan $\bar{J}_v(u) = [u,v]$ untuk sebarang $u, v \in X$. Selanjutnya dari Teorema 3.6 diperoleh

$$(y,x)_r = \lim_{t\to 0^+} \frac{\bar{J}_{x+ty}(x) - \bar{J}_x(x)}{t}$$

Dari kedua hasil tersebut maka

$$(y,x)_r = \lim_{t\to 0^+} \frac{Re[x.x+ty] - \|x\|^2}{t}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$(y,x)_\ell = \lim_{t\to 0^-} \frac{Re[x.x+ty] - \|x\|^2}{t}$$

Teorema 3.13. Diberikan bernorma *smooth* X atas lapangan $\mathbb{R}$. Jika [., .] $\in S_{\|.\|}$, maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$[x,y] = (x,y)_r = (x,y)_\ell.$$

Bukti : Diambil sebarang $x, y \in X$. Berdasarkan Teorema 3.7 diperoleh $(x,y)_r = sup\{[x,y] : [.,.] \in S_{\|.\|}\}$. Selanjutnya, dari Teorema 3.11, terdapat dengan tunggal $[.,.] \in S_{\|.\|}$. Oleh karena itu,

$$(x,y)_r = sup\{[x,y] : [.,.] \in S_{\|.\|} = [x,y].$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$(x,y)_\ell = [x,y].$$

Kesimpulan

Semi hasil kali dalam atas dan bawah merupakan suatu fungsi tertentu yang dibangun oleh norma. Lebih lanjut, sifat-sifat dari fungsi tersebut lebih lemah dari hasil kali dalam. Beberapa diantaranya adalah $(x,y)_r + (z,y)_r \le (x+z,y)_r$ dan $(x,y)_\ell + (z,y)_\ell \ge (x+z,y)_\ell$ untuk setiap $x, y \in X$ dengan X merupakan ruang bernorma.

Semi hasil kali dalam atas dan bawah ini berkaitan erat dengan *normalized duality mapping* dan semi hasil kali dalam Lumer-Giles. Ini ditunjukkan oleh beberapa ekuivalensi dari definisi semi hasil kali dalam atas dan bawah. Jika J merupakan *normalized duality mapping* pada ruang bernorma X, maka untuk setiap $x, y \in X$, terdapat $w_1, w_2 \in J(x)$ sehingga $(y,x)_r = w_1(y)$ dan $(y,x)_\ell = w_2(y)$. Lebih lanjut, (y, x)r, (y, x)` dapat dinyatakan sebagai $(y,x)_r = sup\{w(y) : w \in J(x)\}$ dan $(y,x)_\ell = inf\{w(y) : w \in J(x)\}$. Jika $(X, \|.\|)$ ruang bernorma dan $[.,.]$ semi hasil kali dalam Lumer-Giles yang membangkitkan norma $\|.\|$, maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$(y,x)_r = \lim_{t\to 0^+} [y, x + ty]$$

dan

$$(y,x)_\ell = \lim_{t\to 0^-} [y, x + ty].$$

Pustaka

Alsina, C., dkk., 2010, *Norm Derivatives and Characterizations of Inner Product Spaces*, Singapura : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Dragomir, S.S., 2004, *Semi-Inner Products and Applications*, New York : Nova Science Publishers Inc.

Giles, J.R., 1967, Classes of Semi-Inner-Product Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 129, 436-446.