PEMANFAATAN *GEOGEBRA* UNTUK MENGGAMBAR POTRET FASE SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Eminugroho Ratna Sari
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
eminugroho@uny.ac.id

ABSTRAK

Perilaku solusi sistem persamaan diferensial seringkali akan lebih mudah diinterpretasikan melalui grafik, tetapi hal ini tidak mudah digambar tanpa bantuan *software*. Padahal s*oftware* matematika seringkali membutuhkan bahasa pemrograman yang rumit untuk mendapatkan hasil yang diinginkan. Hal ini tidak mudah dilakukan bagi pemula. Sementara, di lain pihak terdapat *software* yang lebih mudah digunakan, khususnya dalam menggambar grafik. Tujuan penulisan paper ini adalah bagaimana memanfaatkan *Geogebra* sebagai *software* yang *user friendly* untuk menggambar potret fase sistem persamaan diferensial untuk mengamati perilaku solusinya. Akan diberikan langkah-langkah menggambar potret fase sistem persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear. Berdasarkan potret fase dapat diketahui perilaku solusi di sekitar titik ekuilibrium.

Kata Kunci: *Geogebra*, *potret fase*, sistem persamaan diferensial

ABSTRACT

The behavior of solutions of differential equations systems will be more easily interpreted by graphs, but this is not easy drawn without software. As known, mathematics software often requires a complicated programming language to get the desired results. It is not easy for beginners. On the other hand, there is software that is easier to use, especially in drawing a graph. The purpose of this paper is how to utilize GeoGebra as user friendly software to draw a phase portrait of a system of differential equations. Step-by-step drawing phase portrait systems of differential equations both linear and nonlinear will be given. Based on the phase portrait can be seen the behavior of solutions around the equilibrium point.

Keywords: *Geogebra,* phase portrait, differential equations systems

Pendahuluan

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat derivative atas satu atau lebih variable tak bebas terhadap satu atau lebih variable bebas. Jika persamaan hanya memuat satu atau lebih variable tak bebas terhadap satu variable bebas, maka disebut persamaan diferensial biasa. Lebih lanjut, suatu fungsi *f* disebut solusi dari persamaan diferensial jika *f* terdefinisi pada suatu persamaan diferensial beserta turunan-turunannya pada suatu interval *I*, dan apabila disubstitusi ke persamaan diferensial tersebut akan terpenuhi. Suatu persamaan diferensial disebut linear jika (1) variable tak bebas dan/atau turunan-turunannya bukan merupakan fungsi transenden, (2) pangkat dari variable tak bebas dan turunan-turunannya adalah satu, (3) tidak ada perkalian antara variable tak bebas dengan dirinya sendiri, atau dengan turunan-turunannya, atau antar turunan-turunannya (Ross, 1984).

Himpunan berhingga dari persamaan diferensial disebut sebagai sistem persamaan diferensial. Hal menarik yang dapat dilihat setelah mendapatkan solusi suatu sistem persamaan diferensial adalah dengan menganalisa perilaku dari solusi sistem tersebut. Bucur (2006) telah membahas mengenai teori perilaku solusi suatu persamaan diferensial. Sementara Ademola (2011) menganalisa kestabilan untuk persamaan diferensial nonlinear. Perilaku solusi sistem persamaan diferensial juga sering diaplikasikan dalam pemodelan matematika di bidang biologi. Bagaimana penyebaran suatu penyakit dapat dianalisa sehingga dapat diprediksi kapan akan terjadi epidemic. Model SIR merupakan pemodelan epidemiologi pertama kali yang diperkenalkan oleh Kermack & McKendrick (1927). Pada model klasik ini diasumsikan tidak ada kelahiran dan kematian. Modifikasi model ini terus mengalami perkembangan, mulai dari muncul model SIR dengan adanya kelahiran dan kematian, model SIR dengan efek demografi, model SIR dengan vaksinasi (Keeling, Tildesley, House, & Danon, 2013), bahkan dengan control (Bakare, Nwagwo, & Danso-Addo, 2014).

Analisa mengenai perilaku solusi ini tidak mudah dilakukan. Namun demikian, dapat juga dianalisa melalui potret fase. Menggambar potret fase tanpa bantuan *software* seringkali juga tidak mudah dilakukan. Dewasa ini *software* matematika telah banyak ada antara lain MAPLE, MATLAB, WinGeom, WinPlot, maupun *Geogebra.*

Geogebra merupakan salah satu *software* yang *free download* yang sering digunakan dalam pembelajaran matematika karena fiturnya yang lengkap dan interaktif. *Geogebra* juga relative lebih mudah digunakan daripada *software* yang lain karena tidak membutuhkan bahasa pemrograman yang rumit (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis, & Lavicza, 2008). Salah satu yang bisa dimanfaatkan dari Geogebra adalah menggambar potret fase dari sistem persamaan diferensial.

Pada paper ini akan dibahas mengenai penggunaan *Geogebra* untuk menggambar trayektori solusi sistem persamaan diferensial, lebih lanjut bagaimana potret fase dari sistem tersebut. Pertama akan dibahas untuk sistem persamaan diferensial linear. Pada bagian ini, akan diberikan contoh-contoh sistem persamaan diferensial linear yang kemudian dianalisa bagaimana perilaku solusi sistem tersebut melalui potret fase yang diperoleh dengan *Geogebra*. Selanjutnya akan dibahas bagaimana penggunaan *Geogebra* untuk menggambar trayektori solusi sistem persamaan diferensial nonlinear, dalam hal ini yang akan dibahas untuk model SIR.

Untuk itu, berikut diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan sistem persamaan diferensial. Antara lain definisi solusi sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium dan kestabilan.

Sistem Persamaan Diferensial

Pada bagian ini akan dibahas mengenai definisi sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, kestabilan, bidang fase, trayektori dan potret fase. Diberikan sistem persamaan diferensial biasa

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

dengan kondisi awal $x_i(t_0) = x_{i0}$, i = 1, 2, ..., n.

Sistem (1) dapat ditulis sebagai

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

dengan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)'$ dan kondisi awal $x(t_0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$.

Selanjutnya notasi $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ menyatakan solusi Sistem (2) yang melalui $\boldsymbol{x}_0$.

Selanjutnya akan diberikan definisi titik ekuilibrium suatu sistem pada $\mathbb{R}^n$.

Definisi 1 (Perko, 1991)

Titik $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium Sistem (2) jika $f(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$.

Definisi 2 (Perko, 1991)

Diberikan $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ titik ekuilibrium Sistem (2).

i. *Titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}}$ dikatakan <u>stabil lokal</u> jika untuk setiap bilangan ε > 0, terdapat bilangan δ = δ (ε) > 0, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\boldsymbol{x}(t)$ yang memenuhi $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \hat{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ berlaku $\|\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$, untuk setiap* $t \geq t_0$.
ii. *Suatu titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}}$ dikatakan <u>tak stabil</u>, jika tidak dipenuhi (i).*
iii. *Titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}}$ dikatakan <u>stabil asimtotik lokal</u>, jika titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}}$ stabil dan jika terdapat $\delta_0 > 0$, sehingga untuk setiap solusi $\boldsymbol{x}(t)$ yang memenuhi $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \hat{\boldsymbol{x}}\| < \delta_0$ berlaku* $\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = \hat{\boldsymbol{x}}$.

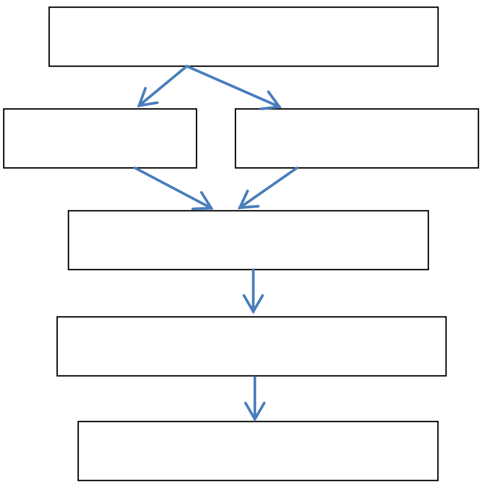
Menganalisa kestabilan di sekitar titik ekuilibrium menggunakan Definisi 2 seringkali tidak mudah dilakukan. Untuk melihat perilaku solusi dapat melalui potret fase. Diperhatikan Sistem (2), untuk fungsi atas 2 variabel tentu dapat digambar grafik solusinya. Dalam hal ini, bidang-x_1x_2 sebagai tempat untuk menggambar grafik disebut sebagai **bidang fase.** Sementara, sebuah kurva/grafik solusi yang dilengkapi dengan arah disebut **trayektori,** arah berkaitan dengan *t* yang membesar**.** Gabungan dari trayektori-trayektori disebut **potret fase.** Lebih lanjut, jika semua trayektori berada di sekitar titik ekuilibrium, maka disebut stabil, dan jika pada akhirnya semua trayektori mendekati titik ekuilibrium, maka disebut stabil asimtotik. Sedangkan, jika ada trayektori yang menjauh dari titik ekuilibrium, maka disebut tidak stabil.

Metode Penelitian

Paper ini berisi kajian mengenai pemanfaatan Geogebra dalam menggambar potret fase dari suatu sistem persamaan diferensial. Adapun pembahannya menggunakan studi literature yang mengambil dari buku-buku maupun jurnal yang berkaitan dengan sistem persamaan diferensial dan perilaku solusinya. Langkah-langkahnya sebagai berikut

1. Mempelajari sistem persamaan diferensial berikut perilaku solusinya secara analitik.
2. Mempelajari *Geogebra* untuk persamaan diferensial.
3. Memanfaatkan *Geogebra* dalam menggambar solusi sistem persamaan diferensial.
4. Menginterpretasikan perilaku solusi berdasarkan gambar yang diperoleh dari *Geogebra.*

Diagram alir mengenai pembahasan dalam paper ini adalah sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram alir pembahasan

Pada bagian selanjutnya akan dibahas bagaimana menggambar potret fase sistem persamaan diferensial menggunakan *Geogebra*.

Hasil dan Pembahasan

Geogebra merupakan *software* yang dapat diperoleh secara gratis melalui www.geogebra.org. Saat ini, versi terbaru adalah *Geogebra* 5. Versi inilah yang digunakan dalam pembahasan paper ini. Setelah *Geogebra* terpasang, maka akan muncul *icon* yang berbentuk

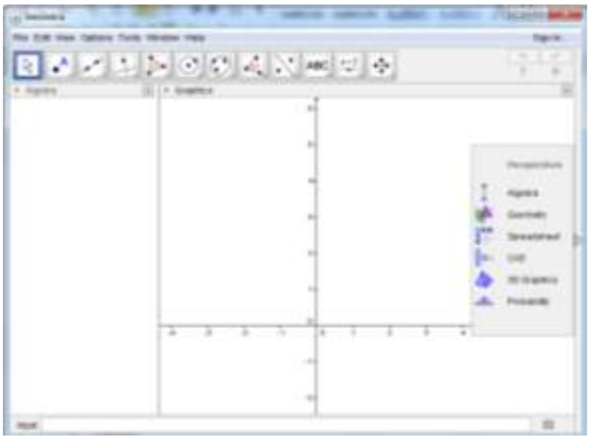
 .

Geogebra sangat membantu dalam pemahaman materi kalkulus, statistika maupun geometri. Bahkan terus mengalami perkembangan hingga saat ini dapat digunakan untuk materi persamaan diferensial (Kovacs, 2010). Pada paper ini, akan dibahas mengenai pemanfaatan Geogebra dalam menggambar potret fase sistem persamaan diferensial melalui contoh-contoh.

1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Pada dasarnya, langkah-langkah untuk masing-masing contoh akan sama, yaitu

1. Membuka jendela Geogebra. Berikut adalah tampilan awal Geogebra.



Gambar 2. Tampilan awal Geogebra

2. Membuat titik dengan mengklik bagian seperti tampak pada Gambar 3 berikut. Misal titik yang dibuat diberi nama dengan titik *A*.

Gambar 3. Membuat titik A sebagai nilai awal

Tujuan membuat titik ini adalah digunakan sebagai nilai awal dari sistem persamaan diferensial.

3. Menginput ruas kanan dari sistem persamaan diferensial yang akan digambar trayektori solusinya. Misal fungsi diberi nama dengan $f(x,y)$ dan $g(x,y)$.
4. Menggambar trayektori solusi sistem persamaan diferensial dengan menginput perintah sebagai berikut

SolveODE[<y'>, <x'>, <Start x>, <Start y>, <End t>, <Step>]

Suku pertama pada perintah tersebut adalah fungsi ruas kanan dari persamaan kedua dari sistem persamaan diferensial, yaitu *g*. Suku kedua merupakan fungsi ruas kanan dari persamaan pertama, yaitu *f*. Suku ketiga menyatakan nilai awal untuk *x*, diisikan dengan cara $x(A)$, dengan *A* adalah titik yang telah dibuat pada langkah kedua. Suku keempat diisi dengan $y(A)$. Suku kelima menyatakan waktu, karena sistem persamaan diferensial merupakan fungsi atas waktu. Sedangkan suku keenam untuk *increment* dari trayektori, semakin kecil nilai yang diinput, maka trayektori yang tampak akan semakin *smooth.*

5. Setelah diperoleh trayektori solusi berdasarkan langkah 4, titik *A* dapat digeser sehingga perilaku solusi akan lebih jelas. Atau langkah 2 – 4 dapat diulang kembali menggunakan titik yang berbeda untuk lebih memahami perilaku solusinya.
6. Selanjutnya untuk mendapatkan arahnya menggunakan perintah

   Sequence[Sequence[Vector[(i,j), (i,j) + 0.15(f(i,j),g(i,j)) / sqrt(f(i,j)^2 + g(i,j)^2)], i, 0, 5, 0.2], j, 0, 5, 0.2]

   Artinya akan digambar potret fase untuk sumbu-*x* dan sumbu-*y* positif. Selanjutnya untuk potret fase pada sumbu-*x* negative dan sumbu-*y* positif digunakan

   Sequence[Sequence[Vector[(i,j), (i,j) + 0.15(f(i,j),g(i,j)) / sqrt(f(i,j)^2 + g(i,j)^2)], i, -5, 0, 0.2], j, 0, 5, 0.2]

   Untuk potret fase pada sumbu-*x* negative dan sumbu-*y* negatif digunakan

   Sequence[Sequence[Vector[(i,j), (i,j) + 0.15(f(i,j),g(i,j)) / sqrt(f(i,j)^2 + g(i,j)^2)], i, -5, 0, 0.2], j, -5, 0, 0.2]

   Untuk potret fase pada sumbu-*x* positif dan sumbu-*y* negatif digunakan

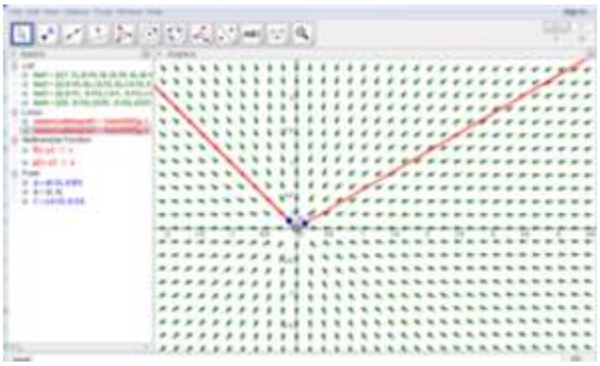
   Sequence[Sequence[Vector[(i,j), (i,j) + 0.15(f(i,j),g(i,j)) / sqrt(f(i,j)^2 + g(i,j)^2)], i, 0, 5, 0.2], j, -5, 0, 0.2]

Berdasarkan langkah 1 – 6, berikut akan digunakan untuk menggambar potret fase dari masing-masing sistem persamaan diferensial berikut

Contoh 1. Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

Menggunakan Geogebra, diperoleh potret fase Sistem (3) sebagai berikut



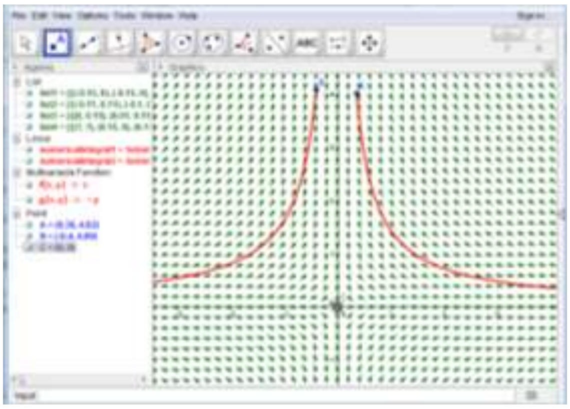
Gambar 4. Potret fase Sistem (3)

Berdasarkan Definisi 1, Sistem (3) mempunyai titik ekuilibrium $(0,0)^T$, pada Gambar 4 ditunjukkan dengan titik B, sedangkan gambar yang berwarna merah menunjukkan trayektori solusi dengan nilai awal di A dan C. Berdasarkan Gambar 4 tersebut bahwa trayektori-trayektori solusi menjauh dari titik ekuilibrium. Hal ini berarti, titik ekuilibrium dari Sistem (3) tidak stabil.

Contoh 2. Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned} \qquad (4)$$

Diperoleh potret fase Sistem (4) menggunakan Geogebra sesuai langkah 1-6 adalah



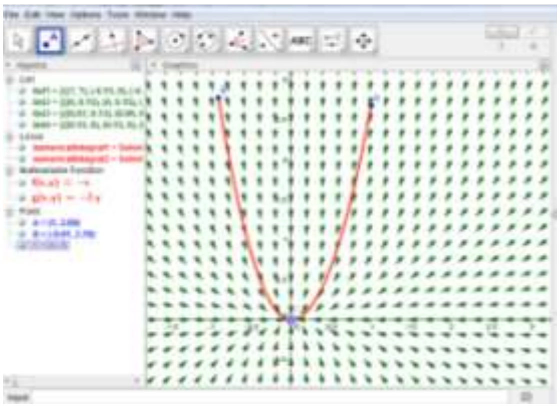
Gambar 5. Potret fase Sistem (4)

Berdasarkan Definisi 1, Sistem (4) mempunyai titik ekuilibrium $(0,0)^T$, pada Gambar 5 ditunjukkan dengan titik C, sedangkan gambar yang berwarna merah menunjukkan trayektori solusi dengan nilai awal di A dan B. Berdasarkan Gambar 5 tersebut bahwa trayektori-trayektori solusi pada kuadran I,II,III maupun IV menuju titik ekuilibrium, demikian juga untuk sepanjang sumbu-*y*. Namun, untuk sepanjang sumbu-*x* justru menjauh dari titik ekuilibrium. Hal ini berarti, titik ekuilibrium dari Sistem (4) tidak stabil.

Contoh 3. Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2\end{aligned} \qquad (5)$$

Potret fase dari Sistem (5) adalah



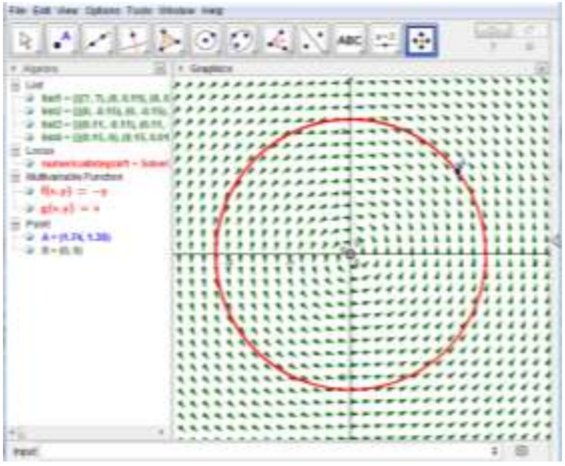
Gambar 6. Potret fase Sistem (5)

Berdasarkan Definisi 1, Sistem (5) mempunyai titik ekuilibrium $(0,0)^T$, pada Gambar 6 ditunjukkan dengan titik C, sedangkan gambar yang berwarna merah menunjukkan trayektori solusi dengan nilai awal di A dan B. Berdasarkan Gambar 6 tersebut bahwa trayektori-trayektori solusi pada kuadran I,II,III maupun IV menuju titik ekuilibrium, demikian juga untuk sepanjang sumbu-*y* dan sumbu-*x*. Hal ini berarti, untuk *t* yang membesar solusi mendekati titik ekuilibrium, akibatnya titik ekuilibrium dari Sistem (5) stabil asimtotik.

Contoh 4. Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned} \qquad (6)$$

Potret fase dari Sistem (6) adalah



Gambar 7. Potret fase Sistem (6)

Berdasarkan Definisi 1, Sistem (6) mempunyai titik ekuilibrium $(0,0)^T$, pada Gambar 7 ditunjukkan dengan titik B, sedangkan gambar yang berwarna merah menunjukkan trayektori solusi dengan nilai awal di A. Berbeda dengan potret fase pada Contoh 3, bahwa pada Gambar 7 tampak bahwa trayektori-trayektori solusi pada kuadran I,II,III maupun IV hanya berada di sekitar titik ekuilibrium. Hal ini berarti, titik ekuilibrium dari Sistem (6) adalah stabil.

2. Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Selanjutnya, untuk sistem persamaan diferensial nonlinear akan dibahas untuk menggambar potret fase model SIR. Model SIR merupakan model matematika biologi yang sering dibahas. Pada model ini, populasi dibagi menjadi 3 kelas yaitu kelas *Susceptible* (*S*) untuk menyatakan populasi yang rentan terkena penyakit, kelas *Infectious* (*I*) untuk menyatakan populasi yang terinfeksi penyakit dan kelas *Recovered* (*R* untuk menyatakan populasi yang sembuh dan kebal terhadap penyakit. Model SIR berbentuk (Kermack & McKendrick, 1927)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I \end{aligned} \qquad (7)$$

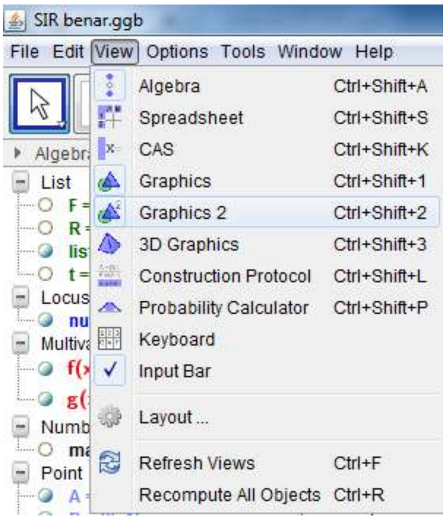
Karena kelas *R* tidak mempengaruhi kelas *S* dan *I*, maka Sistem (7) cukup dipandang sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I \end{aligned} \qquad (8)$$

Pembentukan model maupun analisa perilaku solusi Sistem (8) telah dibahas secara detail oleh Brauer (2001). Pada paper ini, akan dianalisa mengenai perilaku solusi Sistem (8) menggunakan potret fase yang digambar dengan Geogebra.

Langkah-langkah menggambar hampir sama dengan ketika menggambar sistem persamaan diferensial linear. Namun akan lebih tampak perilakunya jika digambar juga untuk masing-masing solusi *S* dan *I*. Berikut langkah-langkah untuk menggambar potret fase maupun solusi *S* dan *I* dengan Geogebra:

1. Menetapkan maksimum nilai *t* yang digunakan dalam gambar. Misal maxT = 15.
2. Membuat titik *A* dan *B* di sumbu-*y* sebagai nilai awal dari solusi *S* dan *I*, berturut-turut. Misal A = (0,4) dan B = (0,1)
3. Membuka jendela sebagai tempat untuk menggambar grafik yang kedua (dalam hal ini disebut Graphic 2), dengan cara klik *view –> graphic 2,* seperti tampak pada gambar berikut



Gambar 8. Membuka Graphic 2

Tujuannya adalah untuk menggambar trayektori solusi dan potret fase Sistem (8)

4. Membuat titik C ditempatkan di Graphic 2, yaitu C = (y(A),y(B)), sebagai nilai awal dari trayektori solusi
5. Menginput fungsi ruas kanan dari Sistem (8), dalam hal ini diambil $\alpha = 0.33$ dan $\beta = 0.48$, sedangkan *S* dinyatakan dengan *x* dan *I* dinyatakan dengan *y*, jadi

   f(x,y)=-0.48*x*y dan

   g(x,y)=0.48*x*y - 0.33*y
6. Menggambar trayektori solusi yang akan muncul di Graphic 2, dalam hal ini sumbu-*x* menyatakan *S* dan sumbu-*y* menyatakan *I*, yaitu

   SolveODE[g, f, x(C), y(C), maxT, 0.01]
7. Menggambar potret fase Sistem (8), yaitu

   Sequence[Sequence[Vector[(i,j), (i,j) + 0.15(f(i,j),g(i,j)) / sqrt(f(i,j)^2 + g(i,j)^2)], i, 0, 5, 0.2], j, 0, 5, 0.2]
8. Membuat barisan *t*, yang digunakan untuk melihat perilaku masing-masing solusi *S* dan *I*, yaitu

   t= Sequence[i, i, 0, 1, 0.01] maxT
9. Membuat barisan R, untuk titik-titik solusi dari *S*, yaitu

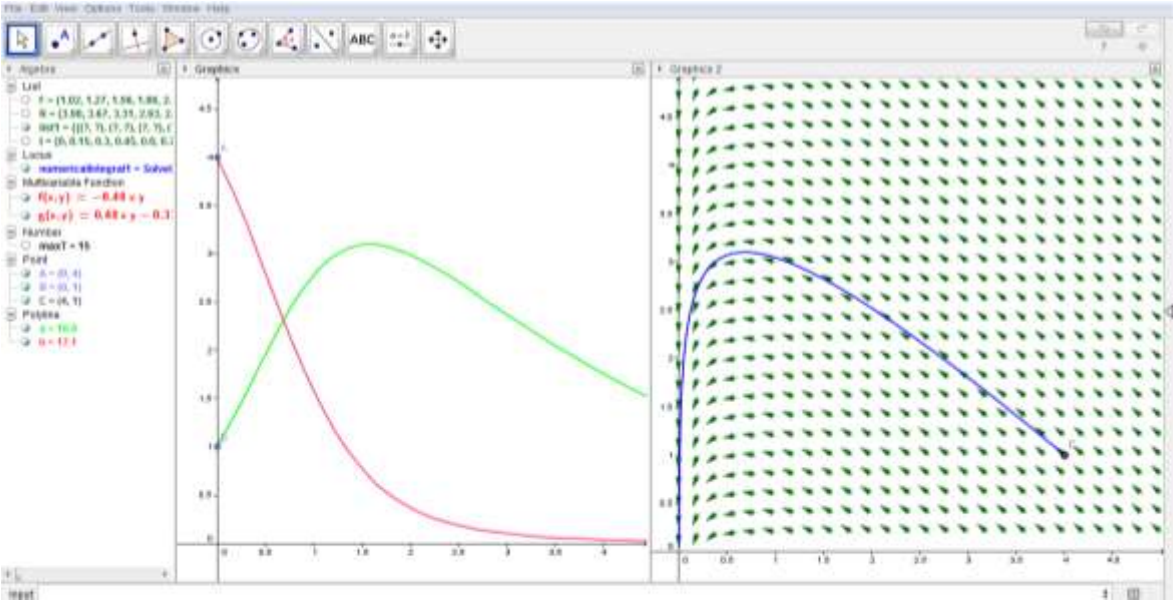
   R=Sequence[x(Point[numericalIntegral1, i]), i, 0, 1, 0.01]
10. Menggambar solusi dari *S* pada Graphic 1, dalam hal ini sumbu-*x* sebagai *t*, sedangkan sumbu-*y* sebagai *S*, yaitu

    Polyline[Sequence[(Element[t, i], Element[R, i]), i, 1, 100]]
11. Membuat barisan F, untuk titik-titik solusi dari *I*, yaitu

    F=Sequence[y(Point[numericalIntegral1, i]), i, 0, 1, 0.01]

12. Menggambar solusi dari *I* pada Graphic 1, yaitu
    Polyline[Sequence[(Element[t, i], Element[F, i]), i, 1, 100]]

Berdasarkan langkah 1 – 12, maka diperoleh :



Gambar 9. Graphic 1 (sebelah kiri) menyatakan solusi dari *S* (warna merah) dan *I* (warna hijau). Graphic 2 menyatakan trayektori solusi dan potret fase Sistem (8).

Berdasarkan Gambar 9 bagian Graphic 1 tampak bahwa populasi *S* turun karena masuk ke kelas *I*, pada saat itu populasi *I* akan naik. Sementara dari Graphic 2 dapat terlihat bahwa solusi menuju ke titik ekuilibrium $(0,0)^T$, artinya di titik ini solusinya stabil.

Kesimpulan

Geogebra sangat bermanfaat dalam pembuatan grafik fungsi. Pada paper ini lebih menekankan bagaimana cara mendapatkan trayektori solusi dan potret fase suatu sistem persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear dengan memanfaatkan Geogebra. Diharapkan dengan menggunakan *software* ini penguasaan konsep mengenai perilaku solusi suatu sistem persamaan diferensial menjadi lebih baik lagi.

Pustaka

Ademola, A. T., & Arawomo, P. O. (2011). Stability, Boundedness and Asymptotic Behaviour of Solutions of Certain Nonlinear Differential Equations of the Third Order. *Kragujevac Journal of Mathematics*, *35*(No 3), 431-445.

Bakare, E., Nwagwo, A., & Danso-Addo, E. (2014). Optimal Control Analysis of an SIR epidemic Model with Constant Recruitment. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 273-285.

Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2001). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. New York: Springer.

Bucur, A. (2006). About Asymptotic Behaviour of Solutions of Differential Equations as x->~. *General Mathematics, Vol.14*(No.2), 55-58.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008). Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra. *11th International Congress on Mathematical Education*. Mexico.

Keeling, M., Tildesley, M., House, T., & Danon, L. (2013, February). The Mathematics of Vaccination. *Mathematics TODAY*, pp. 40-43.

Kermack, W., & McKendrick, A. (1927). A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proc. Royal Soc. London*, (pp. 700-721).

Kovacs, Z. (2010). Modelling with Difference Equations Supported by Geogebra:Exploring the Kepler Problem. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 17*, 141-146.

Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems.* New York: Springer-Verlag.

Ross, S. L. (1984). *Differential Equation.* Canada: John Wiley & Sons, Inc.